- <u>Parallelismo retta-piano</u>

Sia $r: \begin{cases} x = sl + x_0 \\ y = sm + y_0 \\ z = sn + z_0 \end{cases}$ e π $ax+by+cz+d=0$ $\quad r // \pi \Leftrightarrow r_0 \subset \pi_0$

In particolare: $r_0 : \langle\langle \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \rangle\rangle \Rightarrow r_0 \subset \pi_0 \Leftrightarrow al + bm + cn = 0$

- Considero π_1, π_2, π_3 piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ con $i = 1, 2, 3$

Come si intersecano? Dobbiamo affrontare il sistema delle 3 equazioni:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \end{cases}$$

Considero: $I = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ e $C = \left(\begin{array}{c|c} & d_1 \\ I & d_2 \\ & d_3 \end{array} \right)$

$\Rightarrow rg\, I =$
- $1 \Rightarrow rg\, C =$
  - $1 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \pi_3$
  - $2 \Rightarrow \pi_1 // \pi_2 // \pi_3 \Rightarrow$ fascio di piani **IMPROPRIO**
- $2 \Rightarrow rg\, C =$
  - $2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \Rightarrow$ retta asse del fascio proprio di piani
  - $3 \Rightarrow$ asse del fascio*
- $3 \Rightarrow rg\, C = 3 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = 1$ punto

$\downarrow$

I tre piani formano una **STELLA PROPRIA** di piani, cioè l'insieme delle combinazioni lineari dei 3 piani la cui equazione sarà:

$$\lambda(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) + \rho(a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3) = 0$$

* generato da π_1 e π_2, parallelo a π_3 (**STELLA IMPROPRIA**)

• Dato uno spazio vettoriale V, n-dimensionale, definito sul campo $K \Rightarrow$ si dice **FORMA** (o funzionale) **LINEARE** un'applicazione lineare $L: V \to K$.

Considero l'insieme delle forme lineari su V e lo studio: tale insieme si indica con il simbolo V^* o $V^\vee$ e si chiama **SPAZIO DUALE** di V.

Considero le operazioni $L_1 + L_2$ (somma) e αL (moltiplicazione PER UNO SCALARE) per $L_1, L_2, L \in V^*$ e $\alpha \in K$ così definite:

$(L_1 + L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v) \; \forall v \in V$ e $(\alpha L)(v) = \alpha(L(v)) \; \forall v \in V$

$L_i: V \to K$ $i = 1,2$ forme lineari: $L_1 + L_2 : V \to K$ quindi è "forma"

vediamo se è lineare $(L_1 + L_2)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (L_1 + L_2)(v_1) + \alpha_2 (L_1 + L_2)(v_2)$

$$(L_1 + L_2)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = L_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + L_2(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 L_1(v_1) + \alpha_2 L_1(v_2) + \alpha_1 L_2(v_1) + \alpha_2 L_2(v_2) =$$

$$= \alpha_1 \big(L_1(v_1) + L_2(v_1)\big) + \alpha_2 \big(L_1(v_2) + L_2(v_2)\big) = \alpha_1 (L_1 + L_2)(v_1) + \alpha_2 (L_1 + L_2)(v_2)$$

Analogamente si dimostra la linearità di forme αL.

La somma e la moltiplicazione per uno scalare appena definite verificano le proprietà di associatività, commutatività, $\exists$ elemento neutro, $\exists$ dell'opposto, e così via (da dimostrare), in modo tale che V^* diventi uno spazio vettoriale!

Qual è la dimensione? Dobbiamo trovare una base.

Fisso una base di V: $B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow$ cerco un elemento di V^*, η_1, tale che $\eta_1(v_1) = 1$, $\eta_1(v_2) = 0$, $\eta_1(v_3) = 0, \dots, \eta_1(v_3) = 0$

poi definisco $\eta_2 : V \to K$, $\eta_3 : V \to K$ ..., $\eta_n : V \to K$

$$\begin{array}{lll} v_1 \mapsto 0 & v_1 \mapsto 0 & v_1 \mapsto 0 \\ v_2 \mapsto 1 & v_2 \mapsto 0 & v_2 \mapsto 0 \\ v_3 \mapsto 0 & v_3 \mapsto 1 & \vdots \\ \vdots & v_n \mapsto 0 & v_{n-1} \mapsto 0 \\ v_n \mapsto 0 & \vdots & v_n \mapsto 1 \\ & v_n \mapsto 0 & \end{array}$$

$\eta_j : V \to K$ è tale che $\eta_j(v_i) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ $i,j = 1,\dots,n$

$\eta_j(v_i) = \delta_{i,j}$ (SIMBOLO DI KRONEKER)

Dimostro che $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ definisce una base di V^*:

1. Lineare indipendenza: $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1,\dots,n$

2. Generatori: dato $L \in V^* \Rightarrow \exists (\beta_1,\dots,\beta_n) \in K^n \mid L = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \eta_j$

1. $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j = 0 \iff \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j\right)(v) = 0(v) = 0 \ \forall v \in V$

$$\alpha_1 \eta_1(v) + \alpha_2 \eta_2(v) + \dots + \alpha_n \eta_n(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Prendo v_1: $\underbrace{\alpha_1 \eta_1(v_1)}_{\eta_1(v_1)=1} + \underbrace{\alpha_2 \eta_2(v_1)}_{\eta_2(v_1)=0} + \dots \underbrace{\alpha_n \eta_n(v_1)}_{\eta_n(v_1)=0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$, se prendo $v = v_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0, \dots,$ se prendo $v = v_n \Rightarrow \alpha_n = 0$

Da dimostrare che $\eta_1, \dots, \eta_n$ sono generatori (2.) fare.

$\Rightarrow \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ definisce una base di $V^* \Rightarrow \boxed{\dim V^* = \dim V = n}$

$\Rightarrow \exists$ un $\underbrace{\text{isomorfismo}}_{\text{da fare!}}$ $\Phi : V \to V^*$, $\Psi : V^* \to V$

$$v \mapsto \Phi(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i$$

Dimostriamo che $\eta_1, \dots, \eta_n$ generano V^*

Sia $L \in V^* \Rightarrow L: V \to K$ è forma lineare data $\Rightarrow$ conosciamo

$L(v_1) = y_1$, $L(v_2) = y_2$, $\dots$, $L(v_n) = y_n$

Vogliamo dare L come combinazione lineare degli η_j, $j=1, \dots, n$

$L = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \dots + \alpha_n \eta_n$, e quindi vogliamo determinare α_j per $j = 1, \dots, n$.

Le due forme lineari L e $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j$ devono coincidere e quindi devono avere la stessa immagine dei vettori di base di V:

$$\begin{cases} L(v_1) = (\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + \dots + \alpha_n\eta_n)(v_1) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j(v_1) = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 \\ L(v_2) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j(v_2) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 \\ \vdots \\ L(v_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j(v_n) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L(v_1) = y_1 = \alpha_1 \\ L(v_2) = y_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ L(v_n) = y_n = \alpha_n \end{cases} \quad \text{Quindi} \quad L = y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \dots + y_n\eta_n$$

e pertanto $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ generano V^*.

$\Rightarrow$ essendo la cardinalità di una base, n, $\dim V^* = n$

DEFINIZIONE:

La base $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ è detta <u>BASE DUALE</u> di $\mathcal{B}_V$

Fissate $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $\mathcal{B}_{V^*} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ base di V^*, possiamo definire l'applicazione:

$\Phi: V \longrightarrow V^*$ così definita: $\Phi(v_j) = \eta_j \quad \forall j = 1, \dots, n$

Φ è un isomorfismo (non canonico)

Fissata la base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ in V, e presa in V^* la base duale $B_{V^*} = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$, ogni funzionale lineare si esprime in modo unico come un polinomio omogeneo di primo grado nelle coordinate dei vettori: posto $L = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \dots + \alpha_n \eta_n$ e $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$

$$\Rightarrow L(v) = L(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \alpha_1 \eta_1 \left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) + \dots + \alpha_n \eta_n \left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right)$$
$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n .$$

Consideriamo lo spazio BIDUALE di V, duale del duale,

$$V^{**} = \{ f : V^* \longrightarrow K, \text{ lineari} \}$$

È possibile stabilire un isomorfismo $\Phi : V \longrightarrow V^{**}$

Φ è così definito: ad un vettore $v \in V$ si associa la forma lineare $\Phi(v) = \ : V^* \longrightarrow K$ tale che $\Phi(v)(L) = L(v) \quad \forall L \in V^*$.

1) $\Phi(v)$ è lineare: $\Phi(v)(\alpha L_1 + \beta L_2) = (\alpha L_1 + \beta L_2)(v) = \alpha L_1(v) + \beta L_2(v) = \alpha_1 \Phi(v) L_1 + \beta_1 \Phi(v) L_2$

2) Φ è lineare: $\Phi(c_1 v_1 + c_2 v_2)(L) = L(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 L(v_1) + c_2 L(v_2) = c_1 \Phi(v_1)(L) + c_2 \Phi(v_2)(L) = (c_1 \Phi(v_1) + c_2 \Phi(v_2))(L)$

3) Φ è iniettiva: basta dimostrare che $\ker \Phi = \{0\}$ poiché $\dim V = \dim V^{**}$

Supponiamo per assurdo $\ker \Phi \neq \{0\} \Rightarrow \exists\, v \neq 0 \mid \Phi(v) = 0$ cioè $\Phi(v)(L) = L(v) = 0 \quad \forall L \in V^*$, quindi anche per il funzionale così fatto: fissata la base $\{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow L(v_1) = 1$ e $L(v_2) = 0$, $L(v_3) = 0, \dots, L(v_n) = 0$. Assurdo.

L'isomorfismo Φ è canonico, non dipendendo dalle basi.