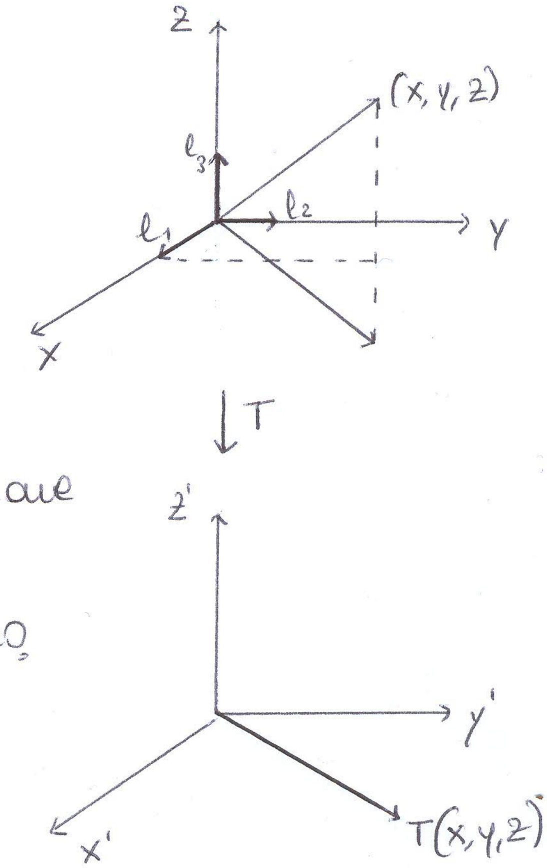
<u>Esempio</u> del fatto che in generale i sottospazi invarianti non sono autospazi:

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare (operatore o ENDOMORFISMO)
$(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$



$$[T]_{C_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rg della matrice $= 3 \Rightarrow T$ È SURIETTIVA
Per il teorema delle dimensioni è anche iniettiva

($\exists$ sottospazi invarianti di dimensione 1 ?) $\to$ da fare

$\exists$ sottospazi invarianti di dimensione 2?

1. $y=0$ Un vettore di $y=0$ ha coordinate $(x, 0, z) \Rightarrow T(x, 0, z) = (x, 0, -z)$; <u>sì</u>
2. $x=0$ Un vettore di $x=0$ ha coordinate $(0, y, z) \Rightarrow T(0, y, z) = (0, y, -z)$; <u>sì</u>
3. $z=0$ I vettori hanno coordinate $(x, y, 0) \Rightarrow T(x, y, 0) = (x, y, 0)$. <u>sì</u>
4. Piano passante per l'asse z ha equazione: L'ASSE Z HA EQUAZIONE
$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$
Prendiamo un piano generico: $ax+by=0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x \to$ un vettore di tale piano ha coordinate $(x, -\frac{a}{b}x, z)$
$T(x, -\frac{a}{b}x, z) = (x, -\frac{a}{b}x, -z) \to$ Tale piano è ~~~~ un sottospazio invariante! Ce ne sono altri? ($\to$ da fare)

- Il piano $z=0$ è autospazio? Lo è se $\forall v \in$ piano $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v)=\lambda v$: infatti basta prendere $\lambda=1 \Rightarrow$ il piano $z=0 = E_1$
- Il piano $x=0$ è autospazio? Cerco $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $T(v)=\lambda v$. Poiché $T(v)=T(0,y,z)=(0,y,-z) \Rightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v)=\lambda v$

∴ Ricordo che dato $T: V \to V$ operatore su V spazio vettoriale n-dimensionale $\Rightarrow$ i suoi autospazi sono sottospazi vettoriali associati ad un autovalore λ in questo modo:

$$T(v)=\lambda v \quad \forall v \in E_\lambda \text{ autospazio di } T.$$

$\Rightarrow T(v)=\lambda v \Rightarrow T(v)-\lambda v=0 \Rightarrow T(v)-\lambda id(v)=0 \Rightarrow (T-\lambda id)(v)=0 \Rightarrow$
I vettori $v \in E_\lambda$ stanno in $\ker(T-\lambda id)$, cioè $E_\lambda = \ker(T-\lambda id)$.
Cerco $\ker(T-\lambda id)$: considero $[T-\lambda id]_B^B$ e la ricerca del nucleo diventa la ricerca di $Sol\Sigma_0$ dove Σ_0 è il sistema $[T-\lambda id]_B^B \cdot [v]_B = 0$; ma
$[T-\lambda id]_B^B = [T]_B^B - [\lambda id]_B^B = [T]_B^B - \lambda I$ PERCHÈ DOMINIO E CODOMINIO HANNO LA STESSA BASE
Cerco soluzioni non nulle perché, per definizione, gli autovettori sono $\neq 0 \Rightarrow \dim Sol\Sigma_0 > 0 \Rightarrow$ rango $[T]_B^B - \lambda I$ NON deve essere massimo $\Rightarrow |[T]_B^B - \lambda I| = 0$
Tale polinomio in λ è detto **POLINOMIO CARATTERISTICO** di $[T]_B^B$ (e quindi anche di T) e le sue radici sono dette **RADICI CARATTERISTICHE** e ci forniscono gli autovalori di T.

Il polinomio caratteristico ha grado $n = \dim V =$ ordine della matrice $[T]_B^B$, il termine di grado n sarà $(-1)^n \lambda^n$. (Se il coefficiente di grado massimo è 1 il polinomio è detto **MONICO** .. E SE PONIAMO $|\lambda I - [T]_B^B| = 0$ OTTENIAMO UN POLINOMIO MONICO CON LE STESSE RADICI CARATTERISTICHE) se Tale polinomio si indica con $p(\lambda) \Rightarrow p(0) = |[T]^B_B| =$

$=$ termine noto del polinomio.

Se λ_0 è radice del polinomio allora si scompone tale polinomio in $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda)$ dove $q(\lambda)$ non ha più λ_0 come radice, k è la <u>molteplicità algebrica della radice λ_0</u> e si indica con $\mu(\lambda_0) = k$.

Determinata la radice λ_0 con $\mu(\lambda_0) = k \Rightarrow$ sostituisco λ_0 in $[T]^B_B - \lambda I$ e risolvo il sistema $([T]^B_B - \lambda_0 I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

Lo spazio delle soluzioni è E_{λ_0}; $\dim E_{\lambda_0} = n - \text{rango}([T]^B_B - \lambda_0 I)$.

Essa è detta <u>molteplicità geometrica di λ_0</u>.

ESEMPIO:

- Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ FISSATA LA BASE CANONICA IN $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$\|$

$[T]^C$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ $\Rightarrow$ il polinomio caratteristico è $(1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 0$

$$\Rightarrow 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$-\text{Traccia}A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$

DETERMINANTE DELLA MATRICE A

- $\lambda_1 = \dfrac{5 - \sqrt{33}}{2}$
- $\lambda_2 = \dfrac{5 + \sqrt{33}}{2}$

$\rightarrow$ Ho determinato due autovalori reali per T: $\mu(\lambda_1) = 1$ e $\mu(\lambda_2) = 1$

Cerco E_{λ_1}: $$\begin{pmatrix} 1 - \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_1}: \frac{-3+\sqrt{33}}{2}x + 2y = 0 \quad (\rightarrow \text{retta in } \mathbb{R}^2)$$

$$E_{\lambda_2}: \begin{pmatrix} 1-\frac{5+\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & \frac{4-5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\frac{-3-\sqrt{33}}{2}x + 2y = 0}$$

ESEMPIO:

- $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-5-\lambda)+16\right] = 0 =$$

$$= (-1-\lambda)(-15-3\lambda+5\lambda+\lambda^2+16) = 0$$

$$\Rightarrow (-1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = 0$$

$$(-1-\lambda)(\lambda^2+1)^2 = 0 \Rightarrow -(\lambda+1)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \text{ con } \mu(-1) = 3$$

$$\rightarrow \text{Sostituiamo } -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 1$$

$$\Rightarrow E_{-1}: 4x + 8z = 0 \Rightarrow \boxed{x + 2z = 0}$$

$$\begin{cases} \text{Molteplicità algebrica} = 3 \\ \text{Molteplicità geometrica} = 2 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE: LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA POSSONO ESSERE DIVERSI