15/05/17 GEOMETRIA

ESERCIZIO

Trovare la distanza tra due rette sghembe:

Data $r: \begin{cases} x-2y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=1-t \end{cases}$

Prendo un punto $Q \in S$ $\quad Q(-1+t;\ 1+2t;\ 1-t)$

Cerco le parametrice

$$\begin{cases} y=f \\ x=2f-2 \\ z=f \end{cases}$$

Prendo $P \in r$ $\quad P(2f-2, f, f)$

Passaggio rette per 2 punti (P e Q)

$$\begin{cases} x=x_P+\lambda(x_Q-x_P) \\ y=y_P+\lambda(y_Q-y_P) \\ z=z_P+\lambda(z_Q-z_P) \end{cases} \Longrightarrow q: \begin{cases} x=2f-2+\lambda(-1+t-2f+2) \\ y=f+\lambda(1+2t-f) \\ z=f+\lambda(1-t-f) \end{cases}$$

$$\boxed{q \perp s \wedge q \perp r}$$

$S_{\text{parametro}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$r_{\text{parametro}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 1(+1+t-2f)+2(1+2\overset{t}{\cancel{f}}-f)-1(1-t-f)=0 \\ 2(+1+t-2f)+1(1+2t-f)+1(1-t-f)=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 6t-3f+2=0 \\ 3t-6f+4=0 \end{cases}$$

ROUCHÉ-CAPELLI

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & -2 \\ 3 & -6 & -4 \end{array}\right)$$

Il rango della matrice incompleta è massimo

Quindi il sistema ha soluzione unica)

$rg(A)=rg(A|B)=2$

$\infty^{n-rg}=\infty^{2-2}=\infty^0=1$ punto

Risolvo per riduzione

$$-2R_2 + R_1 \to R_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & -2 \\ 0 & 9 & 6 \end{array}\right)$$

$9f = 6 \to f = \frac{2}{3}$ $\to$ sostituisco nel sistema

$6t - 2 + 2 = 0 \to t = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f = 2/3 \\ t = 0 \end{cases}$$ $\to$ sostituisco questi parametri in: $$\begin{cases} x = 2f - 2 + \lambda(-1 + t - 2f + 2) \\ y = f + \lambda(1 + 2t - f) \\ z = f + \lambda(1 - t - f) \end{cases}$$

oppure avendo:

$P \in r\,(2f-2,\ f,\ f) = \left(\frac{4}{3} - 2;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$

$Q \in s\,(-1+t,\ 1+2t,\ 1-t) = (-1;\ 1;\ 1)$

$$\text{distanza}\,(P;Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

$$\sqrt{\left(-\frac{2}{3}+1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ MINIMA DISTANZA TRA I PUNTI DI DUE RETTE SGHEMBE

Applicazioni negli spazi euclidei (operatori isometrici e simmetrici)

OPERATORI ISOMETRICI: TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE DATE DA APPLICAZIONI LINEARI.

DEF: Sia $(V, \cdot)$ (prodotto scalare) uno spazio euclideo n-dimensionale $\Rightarrow T: V \to V$ è un operatore isometrico se T è invertibile e $T(u) \cdot v = u \cdot (T^{-1}(v))$ $\forall u, v \in V$

OSS: Un operatore isometrico mantiene le lunghezze dei vettori, le distanze tra punti di V, l'ampiezza degli angoli... (si trasportano esattamente le PROPRIETÀ DEI VARI OGGETTI GEOMETRICI nell'immagine)

INFATTI:

PREPOSIZIONE $T: V \to V$ isometrico $\Rightarrow$ 1) $T(u) \cdot T(w) = u \cdot w$ $\forall u, w \in V$

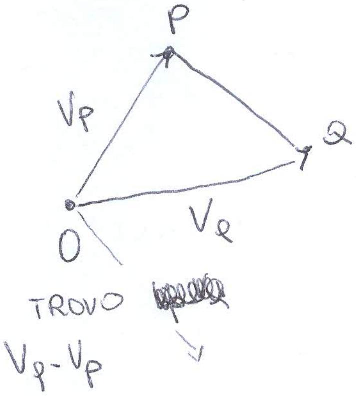
2) $\|T(u)\| = \|u\|$

3) Dati P e Q punti di V $\Rightarrow d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$

4) $\cos(V_P, V_Q) = \cos(T(V_P), T(V_Q))$

Dimostrazione: 1) $T(u) \cdot T(w) = u \cdot T^{-1}(T(w)) = u \cdot w$

applicando la definizione — invertibile



2) $\| T(u) \| = \sqrt{T(u) \cdot T(u)} = \sqrt{u \cdot u} = \| u \|$

3) $d(T(P), T(Q)) = \| T(V_P) - T(V_Q) \| = \| T(V_Q - V_P) \| = \| V_Q - V_P \|$

norma delle differenze

$= d(Q, P)$

4) $\cos(T(V_P), T(V_Q)) = \dfrac{T(V_P) \cdot T(V_Q)}{\| T(V_P) \| \, \| T(V_Q) \|} = \dfrac{V_P \cdot V_Q}{\| V_P \| \, \| V_Q \|}$

prodotto scalare tra i vettori / norme delle immagini

$= \cos(V_P ; V_Q)$

→ (gli operatori isometrici)

Dal punto di vista geometrico vengono chiamati movimenti rigidi:

(~~proprietà che~~ Prendendo un □ nel dominio, nell'immagine rimane un quadrato)

lascia invariate la "METRICA" DELLO SPAZIO EUCLIDEO

Proposizione: se $T: V \to V$ è operatore isometrico $\Rightarrow T^{-1}$ è operatore isometrico

Dim: Considero $v, w \in V \Rightarrow$ cerco $T^{-1}(v) \cdot w$: SAPPIAMO CHE

~~Se~~ T è isometrico se $T(u) \cdot w = u \cdot T^{-1}(w) \quad \forall u, w \in V$

Allora: $T^{-1}(v) \cdot w = T(T^{-1}(v)) \cdot T(w) = v \cdot T(w)$

Proposizione: 1) Se U è un sottospazio di V, invariante per un operatore T isometrico, allora U è invariante anche per T^{-1}

2) Se U è un sottospazio invariante per T isometrico, allora il suo complemento ortogonale $U^{\perp}$ è invariante per T

Dim: 1) Se U è invariante significa che la sua immagine tramite un'applicazione, è contenuto in U stesso.

$T(U) \subseteq U$

Nel nostro caso T è biettivo allora $T(U) = U$

$\Rightarrow T^{-1}(U) = U$

2) Sia $w \in \mathcal{U}^{\perp} \Rightarrow w \cdot u = 0 \ \forall u \in \mathcal{U}$

Voglio dimostrare che $\mathcal{U}^{\perp}$ è invariante per T quindi $T(w) \in \mathcal{U}^{\perp}$

$\forall u \in \mathcal{U}, \Rightarrow T(w) \circ u = w \circ T^{-1}(u)$ ma, poiché $T^{-1}(u) \in \mathcal{U}$ essendo $\mathcal{U}$ invariante per $T^{-1} \Rightarrow w \cdot T^{-1}(u) = 0$

COME SONO FATTI GLI AUTOVALORI DI UN OPERATORE ISOMETRICO?

Sia λ_0 un autovalore di T allora se v è autovettore sappiamo che $T(v) = \lambda_0 v \Rightarrow T(v) \cdot T(v) =$

so che:

1) $= v \circ v$

2) $= \lambda_0 v \cdot \lambda_0 v$

$\parallel$

$\lambda_0^2 (v \circ v)$

allora $v \circ v = \lambda_0^2 (v \cdot v)$

Quindi $\lambda_0^2 = 1$

Unici autovalori reali possibili $\lambda_0 = \pm 1$

c.v.d

<u>Proposizione</u>: Se T è isometrico $\Rightarrow$ autovettori relativi ad autovalori diversi sono tra loro ortogonali

<u>Dim</u>: Prendiamo due ~~autovalori~~ autovettori v, w tali che $T(v) = v$ e $T(w) = -w$

Vogliamo vedere se sono ortogonali (prodotto scalare $= 0$)

$$v \cdot w = T(v) \cdot T(w) = v \cdot (-w) = -v \cdot w \Rightarrow$$

allora $v \cdot w = 0$

c.v.d

ESISTONO TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE IN $\mathbb{R}^n$ CHE SONO ISOMETRICHE, MA NON LINEARI: LE <u>TRASLAZIONI</u>; NON ESSENDO "OPERATORI" NON FANNO PARTE DELLE TRASFORMAZIONI CHE STIAMO STUDIANDO.

Fissiamo in $\mathbb{R}^n$ (V n-dimensionale) una base ortonormale B

$B=\{v_1,\dots,v_n\}$ Sia A matrice associata $=[T]_{B_{\perp n}}$ ortonormale

Sia $\forall v \in \mathbb{R}^n$ e $[V]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X \Rightarrow [T(v)]_{B_{\perp n}} = AX$

Analogamente dato $w \in \mathbb{R}^n$ tale che $[w]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y$

$$= [T(w)]_{B_{\perp n}} = Ay$$

$T(v)\cdot T(w)$ se scrivo mediante la matrice associata e le coordinate dei nostri vettori

$$= (AX)^T \cdot \underset{\substack{\text{matrice} \\ \text{identità}}}{I} \cdot AY = X^T A^T A Y$$

matrice identità = MATRICE ASSOCIATA AL PRODOTTO SCALARE IN BASI ORTONORMALI

RICORDO CHE $F((v,w)) = [v]^T [F] [w]$ SE F È FORMA BILINEARE

$V \bullet W = [v]^T I [w]$

$\hookrightarrow X^T I Y = X^T A^T A Y$ $\boxed{\forall x,y \in \mathbb{R}^n}$ $\Rightarrow$ DEVE VALERE $I = A^T A$

POICHÉ $A A^T = I$, la matrice associata ~~deve essere~~ $A = [T]_{B_{\perp n}}$ è ortogonale.

DETERMINARE LE RADICI CARATTERISTICHE DI A.