16/11/16

DATI DUE SOTTOSPAZI U E W DI UNO SPAZIO VETTORIALE V, E LORO BASI B_U E B_W, FORNIRE UNA BASE DI $U+W$ E $U \cap W$. PER INDIVIDUARE UNA BASE CERCO TANTI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI. QUANTO È LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO INSIEME.

CONSIDERIAMO I VETTORI $u_1, \dots, u_p$ DI BASE DI U E I VETTORI $w_1, \dots, w_q$ DI BASE DI W, NE CONSIDERO I VETTORI DELLE COORDINATE E METTO TALI VETTORI A FORMARE LE COLONNE DI UNA MATRICE A CHE SE $\dim V = n$ SARÀ UNA MATRICE $n \times (p+q)$. IL RANGO DI A DÀ LA DIMENSIONE DI $U+W$ E I VETTORI COLONNA LIN. INDIPENDENTI NE FORNISCONO UNA BASE.

ESEMPIO: $V = \mathbb{R}^4$ $\quad U = \left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle$ $\quad W = \left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle$

LIN. IND.

FORNISCONO UNA BASE DELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE DI $\mathbb{R}^4$

CREO UNA BASE DI $U+W$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 5} \xrightarrow[R_1 - R_4 \to R_4]{R_1 - R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 + R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_4 \to R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

HO 4 PIVOT $\to$ RANGO 4

LE COLONNE CHE CONTENGONO I PIVOT SONO LIN. IND.

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\0\end{pmatrix} \right\}$$

IL NUMERO DI VETTORI DI BASE MI DÀ ~~[illegible]~~ LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO

PER IL TEOREMA DI GRASSMANN $\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$

$$\dim U + \dim W - \dim(U+W) = \dim(U \cap W)$$

$$2 + 3 - \underset{\text{DIMOSTRATO PRIMA}}{4} = 1$$

IL NUMERO MINIMO DI EQUAZIONI PER TROVARE L'EQUAZIONE DI QUESTO SPAZIO È 3, POICHÉ È UNO SPAZIO DI DIMENSIONE 1 IN $\mathbb{R}^4$.

CERCO LA FORMA A GRADINI CANONICA:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 + R_4]{R_3 - R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3 \to R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2 \to R_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{= B}$$

LA 5 COLONNA C_5 È COMBINAZIONE LINEARE DELLE ALTRE $\Rightarrow$

$$C_5(B) \overset{\text{LIN. IND (COME LE ALTRE 4)}}{=} -1C_1(B) - 2C_2(B) + 0C_3(B) - 1C_4(B) \overset{\text{(COME DIMOSTRATO)}}{\Rightarrow} C_5(A) = -C_1(A) - 2C_2(A) + 0C_3(A) - C_4(A)$$

$$\begin{aligned} &\ \, \| \\ &w_3 = -u_1 - 2u_2 + 0w_1 - w_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow w_3 + w_2 = -u_1 - 2u_2$ QUESTO VETTORE STA IN ENTRAMBI GLI SPAZI, CIOÈ $\in U \cap W$

$\Rightarrow -u_1 - 2u_2$ È IL VETTORE DI BASE DI $U \cap W$ CHE STAVO CERCANDO

I COEFFICIENTI SONO LE PRIME k COORDINATE DELLE COLONNE LIN DIP. DELLA MATRICE IN FORMA CANONICA

ESERCIZIO:
DATO UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE $U < V$ DETERMINARE IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO DI CUI È SPAZIO DELLE SOLUZIONI, CIOÈ LA MATRICE CHE INDIVIDUA IL SISTEMA. | DOVE $k = \dim U$.

SIA Σ UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO DI p EQUAZIONI IN n INCOGNITE.

IL SISTEMA PUÒ NON ESSERE RISOLUBILE. ESEMPIO: $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ 3=5 \end{cases}$ $\nexists$ SOLUZIONI

QUANDO HA SOLUZIONI? LO DICE IL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI: UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO $AX=B$ HA SOLUZIONE $\Leftrightarrow rg A = rg(A \mid B)$ (VALE ANCHE PER SISTEMI OMOGENEI, MA È BANALE)

DIMOSTRAZIONE: RISCRIVO $AX=B$ MEDIANTE I VETTORI COLONNA CONSIDERANDO

$$A \in M_{p \times n}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} :$$

$$x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + \dots + x_n C_n(A) = B$$

DOBBIAMO DIMOSTRARE LA "$\Rightarrow$" E LA "$\Leftarrow$".

- NECESSITÀ ("$\Rightarrow$"): SE IL SISTEMA HA SOLUZIONE $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{x}_1 C_1(A) + \tilde{x}_2 C(A) + \dots + \tilde{x}_n C_n(A) = B$
  ESPRIME B COME COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE DI A $\Rightarrow rg(A \mid \underset{\text{LIN. DIP.}}{B}) = rg A$
- SUFFICIENZA ("$\Leftarrow$"): SI OTTIENE RISALENDO LA DIMOSTRAZIONE FATTA. PARTO CON L'IPOTESI CHE $rg(A|B) = rg A$

c.v.d.

~~SISTEMA DI CRAMER~~

UN SISTEMA $AX=B$ È DETTO DI CRAMER SE $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ E $rg A = n$

$rg(A) = rg(\underset{\underset{\text{LIN. DIP.}}{\uparrow}}{A|B})$ PERCHÉ IL $rg(A|B)$ __NON PUÒ__ AUMENTARE (PERCHÉ È GIÀ MASSIMO).

HA SEMPRE 1 SOLA SOLUZIONE $\left(\infty^{\text{NUMERO VARIABILI} - rg} = \infty^{n-n} = 1\right)$. PUÒ ESSERE INDIVIDUATA IN QUESTO MODO:

OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE $|A| \neq 0$ QUINDI POSSIAMO DIVIDERE PER QUESTO NUMERO $(|A|)$ E OTTENERE: $X_j = \dfrac{|C_1(A) \ldots B \ldots C_n(A)|}{|A|}$

AL POSTO DELLA j-ESIMA COLONNA

ESEMPIO: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_1 = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$X = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

SE INVECE HO: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + 1 \\ 2x_1 - x_2 = -x_3 \end{cases}$ → NON CONSIDERO X_3 COME VARIABILE, MA COME PARAMETRO: È UN SISTEMA DI CRAMER IN CUI LA COLONNA DEI TERMINI NOTI È $B = \begin{pmatrix} x_3 + 1 \\ -x_3 \end{pmatrix}$

POSSIAMO DUNQUE TRATTARE UN SISTEMA, CHE A PRIORI NON È DI CRAMER, COME UN SISTEMA DI CRAMER, CON LE OPPORTUNE MODIFICHE.