19/10/2016

Date due matrici $A, B \in \mathcal{M}_{p\times k}$ abbiamo introdotto le operazioni di "somma" e di "moltiplicazione per uno scalare".
Le proprietà di cui godono tali operazioni fanno sì che l'insieme delle matrici sia ora una particolare struttura algebrica detta <u>SPAZIO VETTORIALE</u>.

In generale si dice spazio vettoriale su un campo K un insieme V dotato delle due operazioni di SOMMA: $V \times V \to V$

$(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$

e MOLTIPLICAZIONE per uno scalare $\alpha \in K$: $K \times V \to V$

$(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$

tali che verifichino le seguenti proprietà:

- per la somma:
  1) associativa
  2) $\exists$ elemento neutro
  3) $\exists$ opposto $\forall\ v \in V$
  4) commutatività

  (Ricordo che un insieme dotato di un'operazione che verifica le proprietà 1), 2), 3), 4) è detto GRUPPO ABELIANO)
- per la moltiplicazione per uno scalare:
  1) associatività cioè $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta) v \quad \forall\ \alpha, \beta \in K$ e $v \in V$
  2) $\exists$ elemento neutro cioè $\exists\ 1$ t.c. $1 \cdot v = v$ (tale elemento è l'unità del campo K)
  3) distributività della moltiplicazione rispetto alla somma.
     cioè $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2 \quad \forall\ \alpha \in K$ e $v_1, v_2 \in V$
     e inoltre $(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v \quad \forall\ \alpha, \beta \in K$ e $v \in V$.

<u>CAMPO</u>: una struttura algebrica in cui sono definite le operazione di somma e prodotto, LA SOMMA È dotata della proprietà associativa e commutativa, dell'elemento neutro e opposto (DI OGNI ELEMENTO) ~~e~~, ~~per~~ la moltiplicazione È DOTATA DELLE PROPRIETÀ associativa, COMMUTATIVA, ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO, ESISTENZA ~~dell'elemento ... rispetto alla somma e dell'elemento~~ DEL RECIPROCO (O SIMMETRICO) $\forall$ ELEMENTO DIVERSO DA ZERO; ~~neutro. Non è necessario che contenga l'opposto rispetto alla~~ VALE LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELLA SOMMA RISPETTO ALLA moltiplicazione. ~~dell'elemento neutro della somma~~.

ESEMPI:

es 1) L'insieme $\mathbb{R}$ è un campo e anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ stesso, poiché in $\mathbb{R}$ sono scelti gli scalari.

2) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

In $\mathbb{R}^2$ metto la "somma" tra coppie ordinate:

$$+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

e la "moltiplicazione per uno scalare":

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\left(\alpha, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \longmapsto \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

Le proprietà delle operazioni sono state verificate per le operazioni analoghe tra matrici, ~~pertanto~~ pensando $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$;

pertanto l'insieme $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^0 \to$ punto

$\mathbb{R}^1 \to$ retta

$\mathbb{R}^2 \to$ spazio bidimensionale

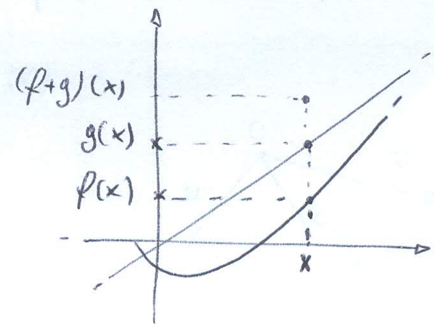
$\mathbb{R}^3 \to$ spazio tridimensionale

$\mathbb{R}^4$ non riusciamo più ad immaginarlo geometricamente, ma queste considerazioni si potrebbero estendere fino a $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ é uno spazio vettoriale reale $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

3) Considero l'insieme delle funzioni continue: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

cioé $\mathcal{C}^0_{[a,b]}$.



$f:[a,b] \to \mathbb{R}$

$g:[a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f+g:[a,b] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)+g(x)$

inoltre definisco la moltiplicazione per uno scalare:

$$\mathbb{R} \times \mathcal{C}^0_{[a,b]} \longrightarrow \mathcal{C}^0_{[a,b]}$$

$$(\alpha, f) \longmapsto \alpha f$$

dove $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot (f(x))$ $\forall x \in [a,b]$.

$\mathcal{C}^0_{[a,b]}$ é uno spazio vettoriale reale? (Verificare tutte le proprietá)

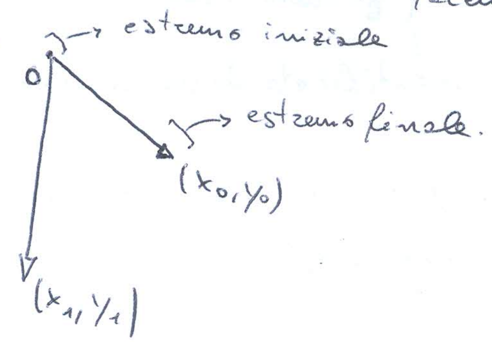
$\hookrightarrow$ se verifica tutte le proprietá ~~[illegible]~~ é uno spazio vettoriale.

Elementi di uno spazio vettoriale: <u>VETTORI</u>,

che si rappresentano geometricamente con VETTORI GEOMETRICI.

Vettori geometrici in $\mathbb{R}^2$: segmenti orientati in $\mathbb{R}^2$ con due estremi detti estremo iniziale e estremo finale: nel piano fissiamo il punto $O=(0;0)$, porremo sempre l'estremo iniziale di ogni vettore geometrico in O. Così facendo posso identificare ogni vettore geometrico con una coppia di numeri reali che identificano ~~[illegible]~~ un punto del piano (corrispondente all'estremo finale. $\Rightarrow$ Ogni vettore geometrico identifica un punto nel piano e viceversa.

es.

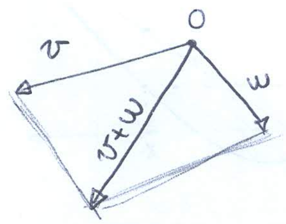


Noi siamo in $\mathbb{R}^2$, ma la definizione può essere data in un campo qualunque.

Introduco le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare.

Somma: $\left\{\begin{matrix}\text{vettori geometrici}\\ \text{di } \mathbb{R}^2\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}\text{vettori geometrici}\\ \text{di } \mathbb{R}^2\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{vettori geometrici}\\ \text{di } \mathbb{R}^2\end{matrix}\right\}$

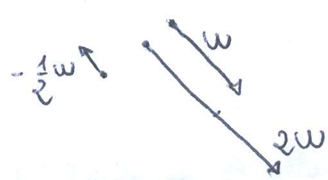
$$(v, w) \longmapsto v+w$$



Moltiplicazione: $\mathbb{R} \times \left\{\begin{matrix}\text{vettori geom.}\\ \text{di } \mathbb{R}^2\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}\text{vettori geom.}\\ \text{di } \mathbb{R}^2\end{matrix}\right\}$

$$(\lambda, w) \longmapsto \underbrace{\lambda}_{\text{scalare}} \underbrace{w}_{\text{vettore geometrico}}$$

vettore geometrico anche senza → sopra.



(Verificare che queste operazioni verifichino le nostre proprietà.)
→ se sono verificate ⇓

$\left\{\begin{matrix}\text{vettori geometrici}\\ \text{su } \mathbb{R}^2\end{matrix}\right\}$ è SPAZIO VETTORIALE.

Allo stesso modo si possono prendere vettori geometrici in $\mathbb{R}^3$ e si può verificare che $\left\{\begin{matrix}\text{vettori geometrici}\\ \text{su } \mathbb{R}^3\end{matrix}\right\}$ è uno SPAZIO VETTORIALE.

E allo stesso modo si possono prendere vettori geometrici in $\mathbb{R}^n$ e si può verificare che $\left\{\begin{matrix}\text{vettori geometrici}\\ \text{su } \mathbb{R}^n\end{matrix}\right\}$ è uno spazio vettoriale.
In questo caso ogni vettore geometrico è identificato da un n-upla.

Le operazioni che si fanno tra i vettori geometrici sono le stesse che si fanno in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\left\{\begin{matrix}\text{vettori geometrici}\\ \text{su } \mathbb{R}^n\end{matrix}\right\}$ corrisponde a $\mathbb{R}^n$.