20/12/2016

$\dim E_\lambda \geq 1$; E_λ autospazio relativo all'autovalore λ di un operatore $T: V \to V$

2) Proposizione: dato l'autovalore λ, $\dim E_\lambda \leq \mu(\lambda)$

Dim: dato E_{λ_0} sia $\mathcal{B}$ una sua base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$ dove V_j è autovettore relativo a λ_0, cioè $T(V_j) = \lambda_0 V_j$ $\forall j = 1, \dots, k$

Estendiamo tale base ad una base di V, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_k, \omega_1, \dots \omega_{n-k}\}$ dove $n = \dim V \Rightarrow [T]_{\mathcal{B}_V} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_0 & 0 & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right)$

Considero $V_1 \Rightarrow T(V_1) = \lambda_0 V_1 \Rightarrow T(V_1) = \lambda_0 V_1 + 0V_2 + 0V_3 + \dots + 0\omega_{n-k}$

$\Rightarrow C^1[T]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; $C^2[T]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, etc..

$$[T]_{\mathcal{B}_V} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \to \\ \text{RIGA} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_0 & 0 & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & 0 & & & \\ \vdots & 0 & \lambda_0 & \vdots & & \vdots \\ \hline & \vdots & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{array}\right)$$

: IL POLINOMIO CARATTERISTICO È DATO DAL DETERMINANTE:

$$\left|\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_0 - \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} - \lambda & \dots & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & & a_{n,n} - \lambda \end{array}\right| = (\lambda_0 - \lambda)^k q(\lambda), \text{ con } \deg(q(\lambda)) = n-k$$

λ_0 PUÒ ESSERE RADICE ANCHE DEL POLINOMIO $q(\lambda)$ E QUINDI LA SUA MOLTEPLICITÀ PUÒ ESSERE $> k$ $\Rightarrow$

$k = \dim E_{\lambda_0} \leq \mu(\lambda_0)$ c.v.d.

Osservazione: autospazi relativi ad autovalori diversi si intersecano solo nel vettore nullo $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$ se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (esercizio da fare)

Analizziamo i coefficienti del polinomio caratteristico $p(\lambda) = C_n \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + C_1 \lambda + C_0$ associato ad una matrice $A \in M_{n \times n}$,

essendo $p(\lambda) = |A - \lambda I| \Rightarrow C_n = (-1)^n$; $C_0 = |A|$ e in generale $C_k = (-1)^k (\sum$ minori principali di A di ordine $n-k$:$)$, $\forall k$

(un minore principale è il determinante di una sottomatrice la cui diagonale principale è parte della diagonale principale di A)

in particolare $C_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = \text{TRACCIA DI } A \cdot (-1)^{n-1}$

$\Downarrow$ $= (-1)^{n-1} \cdot \operatorname{tr} A$

[RICORDO CHE: LA $\sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ È DETTA TRACCIA DI A]

$\operatorname{TRACCIA DI} A = \operatorname{tr} A$

Es 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ cerco $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \underset{\text{tr}A}{5\lambda} \overset{=\det A}{-2}$

2) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ SONO LE SOTTOMATRICI CHE DANNO I MINORI PRINCIPALI DI ORDINE 2 DI A'.

Proposizione matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico cioè, date A e $B \in M_{n \times m} \mid \exists S \quad B = S^{-1}AS \Rightarrow P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

Dimostrazione $\Rightarrow P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S| = |S^{-1}AS - S^{-1}\lambda IS|$

$= |S^{-1}(AS - \lambda IS)| = |S^{-1}(A - \lambda I)S| = |S^{-1}||A - \lambda I||S| \Rightarrow$ POICHÈ

$|S^{-1}||S| = 1 \Rightarrow\ = |A - \lambda I| \Rightarrow |B - \lambda I| = |A - \lambda I|$ c.v.d.

In particolare, matrici simili hanno lo stesso determinante e la stessa traccia.

Domanda: dato $T: V \longrightarrow V$ se riusciamo a dare una base di V $\tilde{B}$, costituita da autovettori, $\Rightarrow$ come è fatta $[T]_{\tilde{B}}$? SI DIMOSTRA CHE $[T]_{\tilde{B}}$ è diagonale!

Definizione: una matrice $A \in M_{n \times n}$ è DIAGONALIZZABILE se è simile ad una matrice diagonale D, cioè se $\exists S \mid D = S^{-1}AS$.

Proposizione: A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ una base dello spazio vettoriale V costituita da autovettori per T $V \rightarrow V$ ~~[illegible]~~ operatore associato alla matrice A in una certa base di V

Dimostrazione "$\Leftarrow$" già dimostrata (da riportare qua)

"$\Rightarrow$" A diagonalizzabile cioè simile a D diagonale $\Rightarrow \exists$ base $\tilde{B}$ di V tale che $[T]_{\tilde{B}} = D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 \dots & a_{22} & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$

detti $v_1, \dots, v_m$ gli elementi di $\tilde{B} \Rightarrow T(v_1) = a_{11}v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_m = a_{11}v_1$

$T(v_2) = 0v_1 + a_{22}v_2 + \dots 0v_m = a_{22}v_2$

$\vdots$

$T(v_n) = 0v_1 + 0v_2 + \dots + a_{nn}v_n = a_{nn}v_n$

$v_1, \dots v_n$ sono autovettori relativi agli autovalori rispettivi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ che sono sulla diagonale della matrice C.V.d.

Data una base $\tilde{B}$ di V costituita da autovettori; supponiamo che I VETTORI $v_1, \dots, v_k$ (DI TALE BASE) siano relativi all' ~~autovettore~~ autovalore λ_1; I VETTORI $v_{k+1}, \dots, v_l$ DELLA BASE siano associati all'autovalore λ_2, e così via; PONGO $E_1 = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$,

$$E_2 = \langle\langle v_{k+1}, \dots, v_l \rangle\rangle, \dots, E_\gamma = \langle\langle v_{s+1}, \dots, v_m \rangle\rangle .$$

<u>Proposizione</u>: $T: V \to V$ operatore è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_\gamma$ autovalori distinti $\sum_{i=1}^{\gamma} \dim E_{\lambda_i} = n$, cioè $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_\gamma} = V$ con $\dim V = n$.

DIMOSTRAZIONE: CON LE NOTAZIONI SOPRA SCRITTE, $E_i \subseteq E_{\lambda_i} \ \forall i$

$$\Rightarrow V = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_\gamma \subseteq E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + E_{\lambda_3} + \dots + E_{\lambda_\gamma} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_\gamma} \subseteq V \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\gamma} E_{\lambda_i} = V$$

c.v.d

<u>Proposizione</u>: $T: V \to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow p(\lambda)$ ha tutte le radici nel campo in cui è definito V e $\dim E_{\lambda_i} = \mu(\lambda_i) \ \forall i = 1, \dots, \gamma$

SE T DIAGONALIZZABILE, abbiamo dimostrato che $\sum_{i=1}^{\gamma} \dim E_{\lambda_i} = n$, poiché $\dim E_{\lambda_i} \leq \mu(\lambda_i)$ e $\sum_{i=1}^{\gamma} \mu(\lambda_i) = n$ (se tutte le radici sono in k) $\Rightarrow \dim E_{\lambda_i} = \mu(\lambda_i)$ $\forall i = 1, \dots, \gamma$ c.v.d.

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ A è diagonalizzabile?

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{due radici caratteristiche } \lambda_1 = 5 - \sqrt{\frac{33}{2}}, \quad \lambda_2 = 5 + \sqrt{\frac{33}{2}}$$

$\mu(\lambda_1) = 1$, $\mu(\lambda_2) = 1$ $\Rightarrow$

$$E_{\lambda_1} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_{\lambda_1}: \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} x + 2y = 0 \text{ retta in } \mathbb{R}^2$$

$\dim E_{\lambda} = 1 = \mu(\lambda_1)$

$$E_{\lambda_2} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_{\lambda_2}: \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} x + 2y = 0 \text{ retta in } \mathbb{R}^2$$

$\dim E_{\lambda_2} = 1 = \mu(\lambda_2)$

A è diagonalizzabile e $D = \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$ la base $\tilde{B} \mid [T]_{\tilde{B}} = D$ È COSTITUITA DA AUTOVETTORI RELATIVI A TALI AUTOVALORI