23/11/2016

TEOREMA DELLE DIMENSIONI

SIA $L: V \longrightarrow W$ APPLICAZIONE LINEARE, SUPPONIAMO DIMENSIONE DI $V = n$, DIM. $W = m$, DIM $\ker L = k$ E DIM. $\mathrm{Im}\,L = p \Rightarrow$ LA DIM. $\ker L$ + DIM $\mathrm{Im}\,L$ = DIM. V

DIMOSTRAZIONE: CONSIDERIAMO $B_{\ker L} = \{u_1, \dots u_k\}$ E $B_{\mathrm{Im}\,L} = \{w_1, \dots, w_p\}$

POICHÈ $w_j \in \mathrm{Im}\,L \Rightarrow \forall j = 1, \dots, p, \exists v_j \in V$ TALE CHE $L(v_j) = w_j$

SIA $w \in \mathrm{Im}\,L \Rightarrow \exists\ v \in V \mid L(v) = w$, INOLTRE $w = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j w_j \Rightarrow$

$\Rightarrow L(v) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j L(v_j)$ POICHÈ L È LINEARE $\Rightarrow L(v) = L\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j\right)$

$$\Rightarrow L(v) - L\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j\right) = 0 \Rightarrow L\left(v - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j\right) = 0 \Rightarrow v - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j \in \ker L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j = \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j + \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i$$ QUINDI

I VETTORI $v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_k$ GENERANO V. SE DIMOSTRO LA LORO LIN. INDIPENDENZA, HO DIMOSTRATO CHE SONO UNA BASE DI $V \Rightarrow$ DIM. $V = p + k$.

CONSIDERO (*) $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p + b_1 u_1 + \dots + b_k u_k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(a_1 v_1 - \dots + b_k u_k) = L(0) = 0$ PER LA LINEARITÀ DI L POSSO SCRIVERE

$$a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) + \dots + a_p L(v_p) + b_1 L(u_1) + \dots + b_k L(u_k) = 0$$

POICHÈ $L(v_j) = w_j\ \forall j = 1, \dots, p$ E $L(u_i) = 0\ \forall i = 1, \dots, k \Rightarrow$ TALE SOMMATORIA DIVENTA $a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_p w_p = 0$ ESSENDO ~~i~~ $w_j, \forall j = 1 \dots p$ LIN. INDIPENDENTI (POICHÈ FORMANO UNA BASE DI $\mathrm{Im}\,L$), $a_j = 0, \forall j = 1 \dots p \Rightarrow$ SOSTITUENDO $a_j = 0$ IN (*) OTTENGO

$b_1 u_1 + \dots + b_k u_k = 0$. ESSENDO GLI u_i, $\forall i = 1 \dots k$ LIN. INDIP. (POICHÈ FORMANO UNA BASE DI $\ker L$), $b_i = 0\ \forall i = 1, \dots, k \Rightarrow \{v_1 \dots v_p, u_1 \dots u_k\}$ È UNA BASE DI $V \Rightarrow$ DIM V = DIM. $\ker L$ + DIM $\mathrm{Im}\,L$. C.V.D

QUESTO 1)

$\exists$ APPLICAZIONI LINEARI INIETTIVE DEL TIPO $L.\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$? (2)

PER IL Th. DELLE DIM., DATA $L.V \to W$, DIM V = DIM KER L + DIM $I_m L$

QUANTO CHIESTO EQUIVALE A RICHIEDERE:

$\exists$ APPLICAZIONI LINEARI $L.\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ CON KER $L = \{0\}$ $\Rightarrow$ DIM. KER L = DIM V − DIM $I_m L$ $\Rightarrow$ ~~...~~ DIM KER L = 3 −

$0 \to 3$, $1 \to 2$, $2 \to 1$ POSSIBILI DIMENSIONI DEL NUCLEO → DIM KER $L \neq 0$

PERCIÒ LA DIMENSIONE DEL NUCLEO IN OGNI CASO È $\neq 0$.

$\Rightarrow \nexists$ APPLICAZIONI LINEARI INIETTIVE $L.\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

IN GENERALE $\nexists$ APPLICAZIONI LINEARI INIETTIVE $L:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ SE $m > k$.

QUESITO 2)

$\exists$ ~~...~~ APPLICAZIONI LINEARI SURIETTIVE $L.\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$? SE L È SURIETTIVA

$I_m L = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ DIM $I_m L = 3$ PER IL TEOREMA DELLA DIMENSIONE

DIM $I_m L$ = DIM V − DIM KER L CIOÈ DIM $I_m L$ = 2 − DIM KER L $\to 0$, $\to 1$, $\to 2$ $\neq 3$ SEMPRE

(NON PUÒ ESSERE −1 PERCHÉ SOLO IL $\emptyset$ HA DIMENSIONE −1)

NO $\nexists$ APPLIC. LINEARI SURIETTIVE $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

IN GENERALE $\nexists$ APPL. LINEARI SURIETTIVE $L.\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ SE $m < k$. OSSERVAZIONE: $\exists$ ISOMORFISMI SOLO TRA SPAZI DELLA STESSA DIMENSIONE

DUE SPAZI VETTORIALI TRA I QUALI $\exists$ UN ISOMORFISMO SONO DETTI ISOMORFI. PER GLI SCOPI DI QUESTA PARTE DELLA GEOMETRIA SI CONSIDERANO "LO STESSO SPAZIO": CIOÈ POSSIAMO PENSARE AGLI ELEMENTI DI UNO SPAZIO IDENTIFICANDOLI CON QUELLI DELL'ALTRO.

CONSIDERO ORA UNO SPAZIO VETTORIALE V (SU CAMPO ~~DI~~ $\mathbb{R}$), DI DIMENSIONE m.

FISSO UNA BASE B_V E CONSIDERO $\mathbb{R}^m$. DÒ LA SEGUENTE APPLICAZIONE SUPPOSTO CHE IL VETTORE $v \in V$ SIA DATO COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI $v_1, \dots v_m$ DI B_V, CIOÈ $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_m v_m$

CONSIDERO:

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^m, \quad v \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

φ È ISOMORFISMO

DIMOSTRARE:

2) φ È BIETTIVA

1) φ È MORFISMO CIOÈ LINEARE: CONSIDERO $v = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i$ E $w = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i$

VOGLIO DIMOSTRARE:

$\varphi(av + bw) = a\varphi(v) + b\varphi(w)$ (RIUNENDO LE DUE PROPRIETÀ DA DIMOSTRARE PER LA LINEARITÀ)

VOGLIO DIMOSTRARE $\varphi(aV + bW) \overset{\odot}{=} a\varphi(V) + b\varphi(W)$

$$\varphi(aV+bW) = \varphi\left(a\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot V_i + b\sum_{i=1}^{m} y_i V_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m}(ax_i+by_i)V_i\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1+by_1 \\ ax_2+by_2 \\ \vdots \\ ax_m+by_m \end{pmatrix}.$$

D'ALTRA PARTE: $a\varphi(V)+b\varphi(W) = a\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1+by_1 \\ \vdots \\ ax_m+by_m\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varphi$ È UN'APPLICAZIONE LINEARE PERCHÈ SI HA L'UGUAGLIANZA RICHIESTA $\odot$

2) BIETTIVITÀ: ESSENDO φ LINEARE, φ È INIETTIVA $\Leftrightarrow \ker\varphi = \{0\}$ E SFRUTTANDO IL Th. DELLE DIMENSIONI SO CHE ~~[illegible]~~ $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V - \dim\ker\varphi$ E PERCHÈ $\dim V =$ DIMENSIONE DEL CODOMINIO $= m \Rightarrow$ SE φ È INIETTIVA È AUTOMATICAMENTE ANCHE SURIETTIVA $\Rightarrow$ BIETTIVA

DIMOSTRO L'INIETTIVITÀ: $\ker\varphi = \{V \in V \mid \varphi(V) = 0\} = \{V = \sum_{i=1}^{m} x_i V_i \mid \varphi(V) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m\end{pmatrix} = 0\} = \{V \in V \mid V = \sum_{i=1}^{m} x_i V_i,\ x_i = 0\ \forall i = 1 \dots m\} \Rightarrow V = 0$

QUINDI φ È UN ISOMORFISMO! [NON È CANONICO MA DIPENDE DALLE BASI SCELTE]

NON È CANONICO = POSSO FORMARE INFINITI ALTRI ISOMORFISMI DI QUESTO TIPO.

ESEMPIO: $V = \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ PRENDO LA BASE CANONICA IN $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{M}_{2\times3}} =$

$$= \left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow \dim \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) = 6 \Rightarrow$ POSSO DARE L'ISOMORFISMO $\varphi: \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^6$

PRESA LA MATRICE $\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times3} \Rightarrow$ possiamo esprimerla come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{2\times3}}$

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \dots + f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}, \quad \text{cioè} \quad \varphi\left(\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}$$

È L'ISOMORFISMO CHE RENDE $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ UNO SPAZIO $\mathbb{R}^6$.