26/10/2016

- VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI / INDIPENDENTI

<u>Def.</u> Si dice BASE di uno spazio vettoriale V un insieme di vettori che generano V e sono linearmente indipendenti.

Ex. L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{R}^2$

1) vediamo la lineare indipendenza:

diamo $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$

matrice associata $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow$ sistema lineare omogeneo di 2 eq. in 2 variabili

rango 2: il det. è $\neq 0 \Rightarrow$ l'ordine massimo del minore non nullo è 2

$\Downarrow$

il sistema è omogeneo (perciò esiste sempre la sol. banale) ed ha $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ sol, che coincide con quella banale

2) dimostriamo che i due vettori generano $\mathbb{R}^2$, cioè

$\left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle = \mathbb{R}^2$

dato un generico vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bisogna dimostrare l'esistenza di $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha + 4\beta = y \end{cases}$ sistema lineare non omogeneo $\rightarrow$ si determinano α e β in funz. di x e y

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - 3\beta \\ 2x - 6\beta + 4\beta = y \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -2x + \frac{3}{2}y \\ \beta = -\frac{y}{2} + x \end{cases}$ CVD

Abbiamo dimostrato che, dato x e y, si può risolvere ad α e β: i due vettori sono perciò effettivamente una base di $\mathbb{R}^2$

Osservazione   Possono esistere più basi di ~~...~~ uno spazio vettoriale

Es. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è base di $\mathbb{R}^2$: $\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\end{cases}$

i vettori sono linearmente indipendenti

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=x\\\beta=y\end{cases}$ perciò i vettori sono generatori di $\mathbb{R}^2$

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è la BASE CANONICA di $\mathbb{R}^2$

- Ogni spazio vettoriale ha INFINITE BASI.

Si verifica la validità di ciò che è stato appena dimostrato in $\mathbb{R}^2$ per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.
Le basi di $\mathbb{R}^3$ sono triplette di vettori, tre come le sue dimensioni.

Definizione : Il numero di vettori di una qualunque base di uno spazio vettoriale V ~~...~~
È la dimensione di V

Proposizione : ogni base di uno spazio vettoriale è costituita dallo stesso numero di vettori

Dimostrazione (per assurdo)
[negazione della tesi presa come ~~ad~~ ipotesi : attraverso passaggi logici si giunge ad una contraddizione dell'ipotesi stessa, il che dimostra l'esattezza della tesi che era stata negata]
Si considera una base $B_1=\{v_1,\dots,v_m\}$ e $B_2=\{w_1,\dots,w_k\}$
con $m\neq K$: si suppone $M<K$.
Si avrà B_1 come base dello spazio V, in cui sono definiti anche i vettori che costituiscono la base B_2

$$w_1=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j v_j,\ w_2=\sum_{j=1}^{m}\beta_j v_j,\dots,w_k=\sum_{j=1}^{m}\sigma_j v_j$$

Si ponga $a_1w_1+\dots+a_kw_k=0$ SOSTITUENDO AI w_j SI HA

$$\Rightarrow a_1\sum_{j=1}^{m}\alpha_j v_j+\dots+a_k\sum_{j=1}^{m}\sigma_j w_j=0$$

$\Rightarrow a_1 \alpha_1 v_1 + \ldots + a_2 \beta_1 v_1 + \ldots + a_K \sigma_m v_m = 0$ RACCOGLIENDO i v_j

$\Rightarrow (a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + \ldots + a_K\sigma_1) v_1 + (a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 + \ldots + a_K\sigma_2) v_2 +$
$+ \ldots + (a_1\alpha_m + a_2\beta_m + \ldots + a_K\sigma_m) v_m = 0$ $\Rightarrow$ ABBIAMO OTTENUTO combinazione lineare (NULLA) dei vettori $v_1, \ldots, v_m$, che formano una base e sono perciò linearmente indipend.: tutti i coefficienti della comb. lineare sono nulli.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + \ldots + a_K\sigma_1 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_1\alpha_m + a_2\beta_m + \ldots + a_K\sigma_m = 0 \end{cases}$$

sistema lineare (omogeneo) di K variabili $(a_1, a_2, \ldots, a_K)$ ed m equazioni. α_j e β_j $(\gamma_j, \ldots, \sigma_j)$ sono scalari conosciuti.
Bisogna determinare se il sistema possiede solo e soltanto la soluzione nulla (ovvero ha 1 sola soluzione, banale).
Le soluzioni sono $\infty^{\#\text{variabili} - \text{rango di } \Sigma} = \infty^{K-m}$:
m è il rango massimo della matrice associata, dal momento che si è posto $m < K$ per ipotesi.
Perciò $K - m > 0 \Rightarrow$ al minimo ∞^{K-m} soluzioni;
il sistema ha <u>infinite soluzioni</u> diverse da quella banale, e ciò implica che i vettori ~~[illegible]~~ $w_1, \ldots, w_K$ siano linearmente dipendenti: si contraddice perciò
[assurdo] l'ipotesi per la quale essi formino una base.

Era errata l'ipotesi $m < K$ <u>SBAGLIATO</u> $\Rightarrow$ PONIAMO $m > k$
ma Se si considera $m > K$ si raggiunge lo stesso assurdo.
Non resta che ammettere $m = K$. CVD

<u>Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di vettori</u>, ed esso coincide con ~~[illegible]~~ il numero di dimensioni dello spazio.

Si è appurato che qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$ è formata da tre vettori.

BASE CANONICA di $\mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

SE CONSIDERIAMO I VETTORI GEOMETRICI, I VETTORI ~~[illegible]~~ delle basi canoniche sono i versori degli assi finito ed IL LORO NUMERO ~~definisce~~ il numero di dimensioni dello spazio.

Data una base di V, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow$ ogni vettore $v \in V$ è dato da una combinazione lineare degli elementi della base (generatori): $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ con $x_j \in K$ $\forall j = 1, \dots, n \Rightarrow$ la n-upla $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ esprime le coordinate di v nella base scelta.

Quali sono le coordinate di v_1 nella base B_V? SI HA

$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ESPRIME IL VETTORE DELLE COORDINATE DI v_1

(poiché v_1 è linearmente indipendente da tutti gli altri vettori che formano la base)

In $\mathbb{R}^2$ prendo la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

dato il vettore $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, si ha che ~~i suoi~~ le sue coordinate sono sempre i coefficienti della combinazione lineare dei vettori della base canonica (SE NON È SPECIFICATO ALTRO)

INFATTI $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \end{cases}$

È necessario ricavare α e β nuovamente se si vogliono trovare le coordinate del vettore v in un'altra base.

$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \alpha + 3\beta = -2 \\ 2\alpha + 4\beta = 3 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $(A \mid B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{array}\right)$

sist. lineare NON omogeneo $\longrightarrow$ potrebbe non avere soluzione

(VEDREMO IL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI)

In questo caso il sistema ha 1 soluzione, poiché il rango delle matrici ~~[illegible]~~ associate è 2.

$$\begin{cases} \alpha = 17/2 \\ \beta = -7/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 17/2 \\ -7/2 \end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{B}}$$

$\uparrow$

COSÌ INDICHIAMO IL VETTORE DELLE COORDINATE DEL VETTORE v NELLA BASE $\mathcal{B}$