Definizione (1) Dato V spazio vettoriale n-dim su K, $F: V \times V \rightarrow K$ forma bilineare simmetrica $\Rightarrow$ un vettore $v \in V$ è detto F-ISOTROPO (o ISOTROPO) se $F(v,v) = 0$

Poiché $v = 0$ è isotropo $\forall F$, i vettori ~~cer~~ isotropi cercati sono quelli $\neq 0$.

(2) se $W < V \Rightarrow W$ è isotropo se $W \subset W^{\perp}$ e $F|_{W \times W} = 0$

$\left(F|_{W \times W} : W \times W \rightarrow K \right)$ F ristretta a $W \times W$

Ho effettuato una restrizione sul dominio di F.

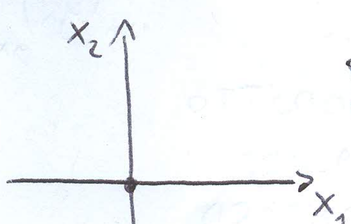
ESEMPIO

$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 y_2 + x_2 y_1$ È simmetrica? Sì, lo è

Cerco i vettori isotropi di F: $F((v,v)) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = 2x_1 x_2 = 0 \Rightarrow$

Fissata la base CANONICA ~~canoni~~ $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 0$



I vettori isotropi non banali sono tutti i vettori non nulli che giacciono sulle rette $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$

Abbiamo 2 rette in $\mathbb{R}^2$ costituite da vettori F-isotropi.

ESERCIZIO (da fare)

Dimostrare ~~data~~ A PARTIRE DALLE IPOTESI DA CUI SIAMO PARTITI che due vettori non isotropi sono sempre linearmente indipendenti se F-coniugati.

__Definizione__ Una base $\mathcal{B}_V$ di V è detta F-ortogonale se è composta da vettori F-ortogonali.

__Definizione__ Due vettori si dicono __F-ortonormali__ se sono F-coniugati e detti v, w tali vettori $F((v,v)) = F((w,w)) = 1$ con 1 unità del campo K.

__Definizione__ Una base $\mathcal{B}_V$ è detta F-ortonormale se i suoi vettori sono F-ortonormali.

__Esempio__

Consideriamo la matrice identità $I \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$ Fissata la base canonica in $\mathbb{R}^n$, la forma bilineare ad essa associata è

$$F((X,Y)) = X^T I Y \quad \text{con } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F((X,Y)) = \underset{1 \times n}{(x_1, \ldots, x_n)} \underset{n \times n}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} = \underset{1 \times n}{(x_1, \ldots, x_n)} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n$$

PRODOTTO SCALARE STANDARD

È il prodotto scalare standard

Il prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica.

Cerco i vettori isotropi $F((v,v)) = 0$ cioè $F((X,X)) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Il prodotto scalare è privo di vettori isotropi.

Proposizione Dati V spazio vettoriale n-dimensionale sul campo K e $F: V\times V \to K$ forma bilineare $\Rightarrow$ se $U < V$ è privo di vettori isotropi e $\dim(U) = l \Rightarrow U^\perp = \{v \in V \mid F(v,u) = 0 \; \forall u \in U\}$ è un sottospazio vettoriale di V $n-l$-dimensionale e $U \oplus U^\perp = V$

Dimostrazione

Sia $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_l\}$ base di U cerco i vettori $v \in V \mid F((v,u)) = 0 \; \forall u \in U$ quindi poiché $u = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j u_j$, è sufficiente cercare i $v \in V$ tali che $F((v, u_j)) = 0 \;\; \forall j = 1, \dots, l$

Data $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \Rightarrow F((v, u_j)) = F\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, u_j\right)\right) =$
$= \sum_{i=1}^{n} x_i F((v_i, u_j)) = 0 \;\; \forall j = 1, \dots, l \Rightarrow$ ora ho il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 F((v_1, u_1)) + x_2 F((v_2, u_1)) + \dots + x_n F((v_n, u_1)) = 0 \\ x_1 F((v_1, u_2)) + x_2 F((v_2, u_2)) + \dots + x_n F((v_n, u_2)) = 0 \\ \vdots \\ x_1 F((v_1, u_l)) + x_2 F((v_2, u_l)) + \dots + x_n F((v_n, u_l)) = 0 \end{cases}$$

l equazioni in n incognite

* ESERCIZIO DA FARE

Sistema lineare omogeneo di l equazioni in n incognite, $l < n$

Tale sistema ha rango* l (cioè le l equazioni sono linearmente indipendenti) $\Rightarrow$ lo spazio delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di V, $U^\perp$, di dimensione $n-l$.

Inoltre $U \cap U^\perp = \{0\}$, poiché se $\exists \, v \neq 0$ tale che $v \in U \cap U^\perp \Rightarrow$
$\Rightarrow F((v,v)) = 0$ ASSURDO perché U è privo di vettori isotropi.

C.V.d

Proposizione Sia $F: V\times V \to \mathbb{R}$ bilineare simmetrica degenere (cioè $[F]_{\mathcal{B}_V}$ non ha rango massimo) $\Rightarrow \exists$ vettori F-isotropi di V.

~~Osservazione~~ Osservazione Una forma bilineare $F: V\times V \to \mathbb{R}$ simmetrica non degenere può avere vettori isotropi.

Esempio $F: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è forma bilineare simmetrica

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1y_2 + x_2y_1$$

è non degenere?

Associamo ad F la matrice $[F]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango massimo

F è non degenere (Vettori isotropi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$)

Proposizione Sia $F: V\times V \to \cancel{K}\ \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica non nulla $\Rightarrow \exists$ almeno un vettore non isotropo.

Dimostrazione

~~.......~~ La caratteristica di $\mathbb{R}$ è 0.

Siano $v, w \in V$ tali che $F((v,w)) \neq 0$ (perchè $F \neq 0$) $\Rightarrow F((v+w, v+w)) =$
$= F((v,v)) + F((v,w)) + F((w,v)) + F((w,w)) = F((v,v)) + 2F((v,w)) +$
$+ F((w,w)) \Rightarrow F((v,w)) = \dfrac{F((v+w, v+w)) - F(v,v) - F((w,w))}{2} \neq 0 \Rightarrow$

POSSIAMO DIVIDERE PER 2
POICHÈ $\mathbb{R}$ HA CARATTERISTICA 0

$\Rightarrow$ almeno uno fra $v, w, v+w$ è non isotropo!

c.v.d

Osservazione Se $F: V\times V \to \mathbb{R}$ è forma bilineare simmetrica non degenere $\Rightarrow$ $U < V$ privo di vettori isotropi $\Rightarrow U \oplus U^{\perp} = V$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE DATO

ciò significa che preso un qualunque vettore $v \in V$, v può essere sempre dato come somma di due vettori $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in U^{\perp}$.

Il vettore u è la proiezione ortogonale di ~~V~~ v su U.

Il vettore w è la proiezione ortogonale di v su $U^{\perp}$.

ESEMPIO: in $\mathbb{R}^2$