SISTEMI LINEARI

27/09/2016

INSIEME = Collezione di oggetti

A seconda delle operazioni che ci metto dentro ne cambio la struttura ALGEBRICA, IMPONENDO ALLE OPERAZIONI DI SODDISFARE DETERMINATE PROPRIETÀ; SI AVRÀ COSÌ LA STRUTTURA DI GRUPPO, DI ANELLO, DI CAMPO, DI SPAZIO VETTORIALE E COSÌ VIA...

- Sistema lineare con K equazioni in n variabili a coefficienti in $\mathbb{R}$: GLI ELEMENTI DI UN CAMPO SI DICONO SCALARI

SISTEMA LINEARE = I monomi delle equazioni che appaiono nel sistema hanno max grado 1

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{K1}x_1 + a_{K2}x_2 + \dots + a_{Kn}x_n = b_K \end{cases}$$

$\to$ eq NON OMOGENEA, perché presenta monomi di grado diverso

Posso risolvere il sistema per: - SOSTITUZIONE = esplicito una variabile e la sostituisco nelle altre equazioni; - SOMMA E SOTTRAZIONE + ALTRI

È importante chiedersi se il sistema ha soluzione!

$b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b_k = 0 \iff$ il sistema è <u>OMOGENEO</u>

$\exists$ (ESISTE) b_j, $j = 1, \dots, k$, t.c. $b_j \neq 0 \iff$ il sistema è NON OMOGE.

$\exists$ SEMPRE ALMENO UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA OMOGENEO.

Nel caso di Σ omogeneo la sua soluzione è costituita dalla n-pla nulla, ed eventualmente altre non nulle.

$\exists$ soluzioni di un sistema lineare non omogeneo dato?
Per ora non si sa! LA SOLUZIONE SARÀ DATA DAL TEOREMA DI ROUCHÈ - CAPELLI CHE VEDREMO PIÙ AVANTI.

Risolviamo un sistema con il <u>metodo di riduzione di GAUSS</u>

esempio

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 \quad\quad - x_3 = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare non omogeneo con 3 variabili in 3 equazioni
Coefficenti reali

Dare una soluzione di un sis. significa determinare una n-upla di numeri reali che sostituiti alle rispettive variabili rendano ogni equazione un'identità

CERCHIAMO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA COL METODO DI GAUSS:

Elimino la prima variabile da tutte le equazioni disposte sotto la prima, SUPPONENDO CHE NELLA PRIMA EQUAZIONE COMPAIA LA PRIMA VARIABILE: SE COSÌ NON FOSSE SCAMBIAMO NEL SISTEMA LA PRIMA EQUAZIONE CON UNA IN CUI IL COEFFICIENTE DELLA PRIMA VARIABILE SIA DIVERSO DA ZERO: IL NUOVO SISTEMA HA LE STESSE SOLUZIONI DEL PRECEDENTE? **VERIFICARE!!**

…raggo la 3° equazione dalla prima

$$\ldots+2x_2-3x_3-1-(x_1-x_3)=0 \Rightarrow \underline{2x_2-2x_3-1=0}$$

…TITUISCO ALLA TERZA EQUAZIONE …ISTEMA, L'EQUAZIONE TROVATA COSÌ.

…nuovo sistema è questo

$$\ldots_1+2x_2-3x_3=1$$
$$x_2+x_3=2$$
$$2x_2-2x_3=1$$

DEFINIZIONE

… è equivalente a quello …iale: hanno le stesse soluzioni

…DE: DEFINIAMO EQUIVALENTI …UE SISTEMI AVENTI LE STESSE SOLUZIONI.

se Questa eq. ha una terna ~~…~~ ~~…~~ come soluzione, ESSA è anche soluzione delle 2 equazioni DI CUI È SOMMA.

esempio

$$p_1(x_1,\ldots,x_n)=0$$
$$p_2(x_1,\ldots,x_n)=0$$

se $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in Sol(p_1=0)\cap Sol(p_2=0)$
$\Rightarrow (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in Sol(p_1+p_2=0)$

INFATTI:

$$\underbrace{p_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}_{0}+\underbrace{p_2(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}_{0}=0$$

Ora faccio 2 volte la II eq − III eq

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ x_2+x_3=2 \\ -4x_3=3 \end{cases}$$

ABBIAMO COSÌ TERMINATO LA PARTE "IN DISCESA" DEL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS.