SI CONSIDERA definita una funzione quando abbiamo stabilito la ~~...~~ immagine DI UN GENERICO ELEMENTO. 1

- Sia V uno spazio vettoriale, W pure, $\dim V = n$, $\dim W = k$. Posso costruire sempre una applicazione lineare $L: V \to W$ se do le immagini di n vettori di V?

~~quindi ci sono dati due vettori e bisogna definire l'applicazione che ci dà le loro immagini~~

- SE $v_1, \dots, v_n$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI si può $\exists!$

Dare L significa dare l'immagine di $v \in V$: quindi bisogna trovare $L(v)$: supponiamo di conoscere $L(v_1) = w_1$, $L(v_2) = w_2$, ..., $L(v_n) = w_n$

POICHÉ $\{v_1, \dots, v_n\}$ È base di V $\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, $\alpha_j \in K \ \forall j$

$$\Rightarrow L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_n L(v_n)$$
$$= \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

- Se i vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono DIPENDENTI non si riesce sempre A DETERMINARE $L: V \to W$ LINEARE; dipende dalle immagini dei vettori $v_1, \dots, v_n$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ prendo in $\mathbb{R}^2$ $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ pongo $L(v_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$L(v_2) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

cerco L lineare, $\nexists$ perché $L(v_2) = L\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = L\left(2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 2L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$= 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE: Se $L: V \to W$ applicazione lineare; $\dim V = n$ CON $\dim W = p$

$\operatorname{Ker} L = \{0\}$ ($\to$ iniettiva)

$\Rightarrow$ L mappa elementi lin. indipendenti in elementi lin. indipendenti

DIMOSTRAZIONE Siano $v_1 \dots v_k \in V$ lin. indipendenti e

$L(v_1) = w_1$, $L(v_2) = w_2$, ..., $L(v_k) = w_k$. PONGO $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_k L(v_k) = 0 \Rightarrow$ perché L è lineare EQUIVALE

A $L\left(\sum_1^k \alpha_j v_j\right) = 0 \quad \Rightarrow \sum_1^k \alpha_j v_j \in \operatorname{Ker} L \quad \Rightarrow$

$$\sum_{1}^{K} \alpha_J v_J \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow \sum_{1}^{K} \alpha_J v_J = 0 \Rightarrow$$ i v_J (SONO) linearmente indipendenti (PER IPOTESI DI INIETTIVITÀ)

$$\Rightarrow \alpha_J = 0 \quad \forall J \leq K$$

- l'insieme delle applicazioni lineari $L: V \to W$ è uno spazio VETTORIALE con le operazioni di somma tra applicazioni e prodotto con scalare (DIMOSTRARE) Tale spazio $\mathcal{L}\mathrm{om}(V, W)$

SOMMA $L_1: V \to W \quad L_2: V \to W \Rightarrow L_1 + L_2 : V \to W$

$(L_1 + L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v)$ per definizione

PRODOTTO PER UNO SCALARE $\alpha \in K \;, L: V \to W \qquad \alpha L: V \to W$

$(\alpha L)(V) = \alpha(L(V))$

- la composizione di L_1 e L_2 (ove possibile) è ancora una L (dove L = applicazione lineare)

deve essere che $\operatorname{Im} L_1 \subseteq D L_2$

$L_1: V \to W \quad L_2: W \to U$ con spazi vettoriali V, W, U

$L_2 \circ L_1$: L_1 è la prima applicata

$L_2 \circ L_1 : V \to U \qquad \left(\begin{array}{c} V \xrightarrow{L_1} \operatorname{Im} L \\ \cap \\ W \xrightarrow{L_2} U \end{array} \right) \qquad (L_2 \circ L_1)(v) = L_2(L_1(v))$

Valgono le proprietà di linearità PER DIMOSTRARE CHE $L_2 \circ L_1$ È LINEARE:

$\Rightarrow (L_2 \circ L_1)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (L_2 \circ L_1)(v_1) + \alpha_2 (L_2 \circ L_1)(v_2)$

$\forall \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \in K \text{ e } v_1 \text{ e } v_2 \in V$

$\| $

$L_2(L_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) = L_2(\alpha_1 L_1(v_1) + \alpha_2 L_1(v_2))$

$= L_2(\alpha_1 L_1(v_1)) + L_2(\alpha_2 L_1(v_2)) = \alpha_1 L_2(L_1(v_1)) + \alpha_2 L_2(L_1(v_2)) =$

VERIFICATO $\qquad = \alpha_1 (L_2 \circ L_1)(v_1) + \alpha_2 (L_2 \circ L_1) v_2$

- So che una applicazione è ~~invertibile~~ biettiva $\Leftrightarrow$ è invertibile

Pongo $L: V \to W$ lineare biettiva $\Leftrightarrow \exists L^{-1}: W \to V$ tale che

$L \circ L^{-1} : W \to W$ sia è identità su W

$L^{-1} \circ L : V \to V$ sia è identità su V

$\Rightarrow$ si dimostra che L^{-1} è lineare (da FARE)

2

APPLICAZIONE LINEARE $\longrightarrow$ MATRICE

Sia $L: V \rightarrow W$ app lin fra spazi vettoriali, $\dim V = n$, $\dim W = p$

$v \in V$ considero $L(v) = w \in W$

fisso una $B_V \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_W \{w_1, \dots, w_p\}$ $\Rightarrow$ POSTO

$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$,

$L(v) = L(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 L(v_1) + \dots + x_n L(v_n)$ ~~Suppongo~~

Suppongo $[L(v_1)]_{B_W} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}, \dots, [L(v_n)]_{B_W} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$[L(v)]_{B_W} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ POSSIAMO RISCRIVERE TALE EQUAZIONE VETTORIALE IN FORMA MATRICIALE

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ QUESTA È LA MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE LINEARE NELLE BASI FISSATE NEGLI SPAZI VETTORIALI ; $\rightarrow$

$$[L]_{B_V}^{B_W} \cdot [v]_{B_V} = [L(v)]_{B_W}$$

$\rightarrow$: in ogni colonna si mettono le "coordinate" DELLE IMMAGINI dei vettori di base del dominio espressi nella base del codominio.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$

$B_{DOM} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$B_{COD.} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Cerco $[L]_{B_{DOM}}^{B_{COD}}$ cerco $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

trovati $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \Rightarrow$

$[L]_{B_{DOM}}^{B_{CODOM}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$[L]^{B_{CODOM.}}_{B_{DOM}} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

da questa matrice possiamo ottenere l'immagine di un qualsiasi vettore v, in base B_{COD}, moltiplicandola per le coordinate del vettore NELLA BASE DEL DOMINIO

ESEMPIO ; SE $[V]_{B_{DOM}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow [L(V)]_{B_{CODOMINIO}}$$