Classificare le quadriche

Se il determinante della matrice omogeneizzata è DIVERSO DA 0 → NON DEGENERE

$x^T A x + B^T x + C = 0$ FORMA MATRICIALE DELLA EQUAZIONE DELLA QUADRICA

↓

matrice associata alla parte quadratica da ridurre A MATRICE DIAGONALE

⇒ se tale diagonalizzazione è fatta ortogonalmente otteniamo una ~~matrice~~ base di vettori ortogonali E NORMALIZZATI.

$$2\sqrt{5}\,\tilde{x}^2 + 3\sqrt{5}\,\tilde{y}^2 - 9\tilde{y} + 3\tilde{x} + 5\sqrt{5} = 0 \qquad \text{I}$$

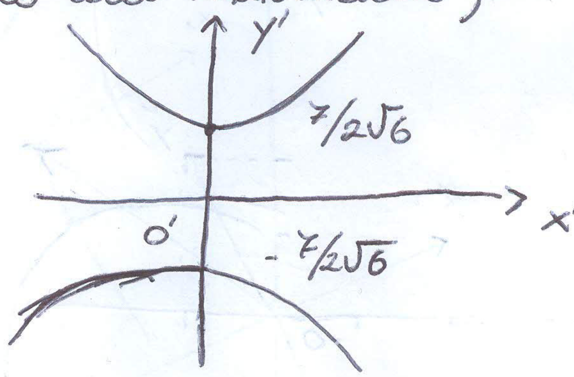
STUDIAMO LA SEGNATURA

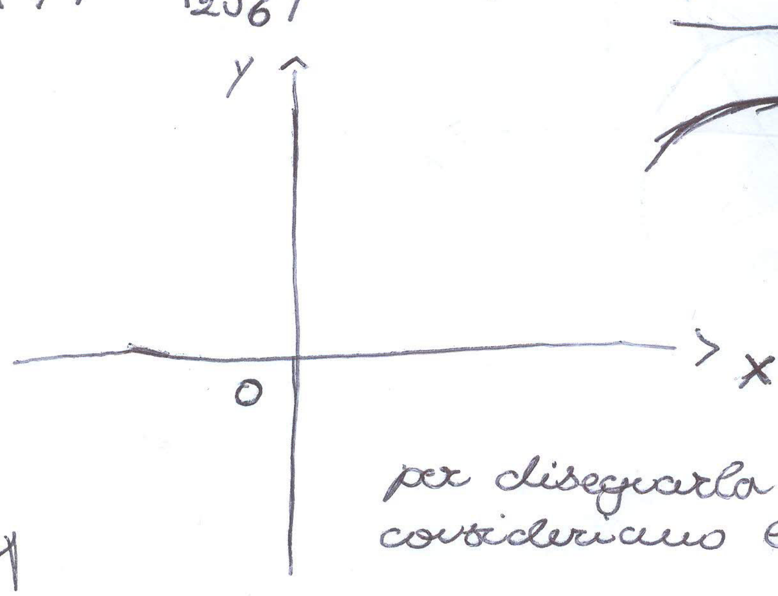
(1, 1) indici di inerzia

la matrice ha rango massimo } → IPERBOLE

Per rappresentare l'iperbole riduciamo ai quadrati l'equazione I per tutte le variabili al quadrato che compaiono (facciamo una TRASLAZIONE)

$$-\frac{x_1^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{7}{2\sqrt{6}}\right)^2} = 1 \qquad \text{II}$$





$\cancel{x^2 - 4xy - 2y^2 - 3x - 3y + 5 = 0}$

per disegnarla nel sistema iniziale consideriamo le trasformazioni fatte

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \overset{S}{\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$$

$Q: x^2 - 4xy - 2y^2 - 3y - 3x + 5 = 0$

$Q = T(\gamma)$ dove γ è l'equazione II

T è la composizione di una traslazione t e della trasformazione definita da $S^{-1} = S^T = S$

$\downarrow$ perché S è simmetrica

cioè $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$

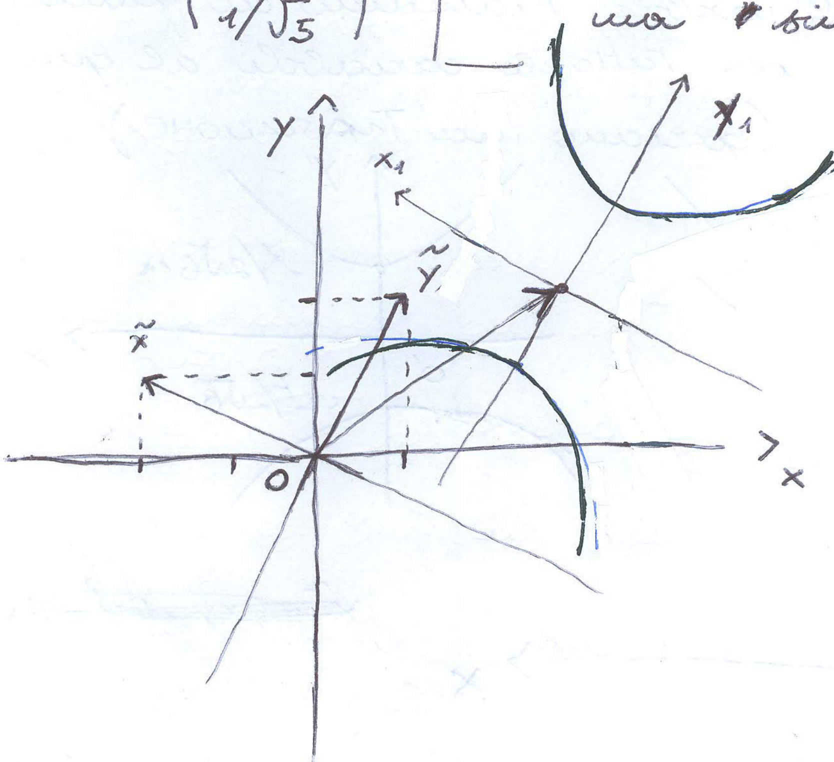
$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ trasformazione finale

$S\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$

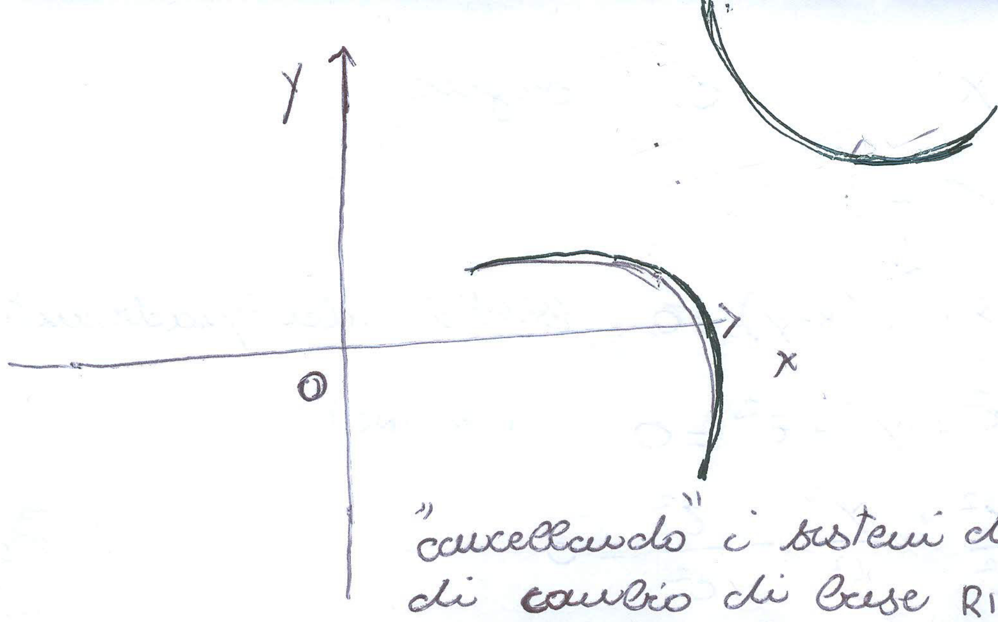
$S\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$

è una isometria con matrice associata simmetrica
$\rightarrow$ non è una rotazione ma una simmetria



$\vdash\!\dashv \; \frac{1}{\sqrt{5}}$

GIUSTA



"cancellando" i sistemi di riferimento di cambio di base RIUSCIAMO A DISEGNARE L'IPERBOLE NEL RIFERIMENTO DELLA BASE CANONICA

Se rango massimo

Se sono presenti <u>tutti</u> i termini al quadrato e $c=0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \; : \; Q$$

$\Rightarrow$ l'equazione è omogenea: se $P=(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \in Q$

$\Rightarrow P_t = t(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \in Q, \; \forall t \in \mathbb{R}$

tutti i punti che giacciono sulla retta passante per l'origine e per P, appartengono a Q: SONO QUADRICHE <u>RIGATE</u>

Se i coefficienti positivi sono $> \frac{n}{2} \Rightarrow$ moltiplicando per -1 otteniamo un numero di coefficienti positivi $< \frac{n}{2}$

$\Rightarrow$ se n è PARI, otteniamo $\frac{n}{2}$ tipi di quadriche;

se n è DISPARI, sono $\frac{n-1}{2}$;

l'origine è il caso banale

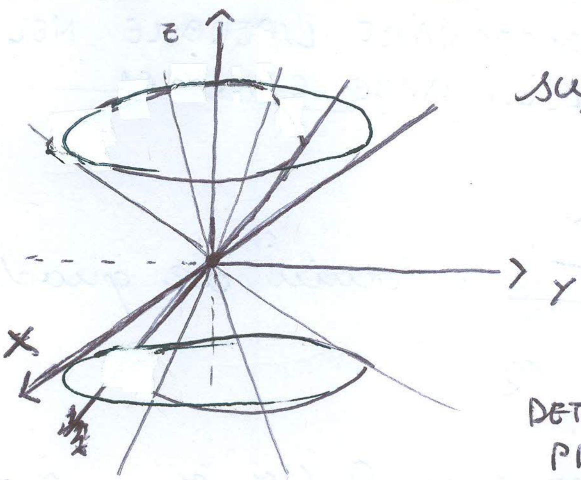
$\longrightarrow$

In $\mathbb{R}^2$ $\quad x^2 + y^2 = 0$ origine

$$x^2 - y^2 = 0$$
$$\downarrow$$
$(x+y)(x-y) = 0$ Bisettrici dei quadranti

In $\mathbb{R}^3$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (ORIGINE)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



superficie conica

PER DISEGNARLA DETERMINIAMO LE CURVE SUI PIANI COORDINATI E SU PIANI AD ESSI PARALLELI!

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$ ellissi

per $x = k$ abbiamo iperboli

per $y = k$ " "

$\boxed{\text{Per} - \text{rg}\, A \neq n}$

1) con tutte le variabili NELL'EQUAZIONE RIDOTTA:

$\Longrightarrow$ quadrica singolare, non degenere

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \dots - \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = x_n$$

moltiplicando per -1 la quadrica non cambia a meno di specchiamenti rispetto allo spazio $n-1$ dimensionale del tipo $x_n = 0$

- se n è PARI $\to$ $\frac{n}{2}$ tipi di quadriche

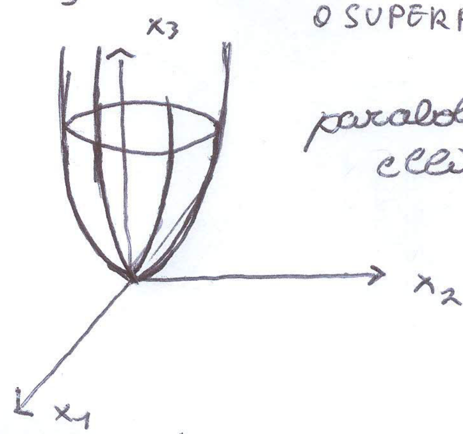
  se n è DISPARI $\to$ $\frac{n+1}{2}$ tipi diversi di quadriche

In $\mathbb{R}^2$ $\quad \frac{x_1^2}{a_1^2} = x_2$ parabola

In $\mathbb{R}^3$ $\quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = x_3$ paraboloide ellittico

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = x_3$$ PARABOLOIDE IPERBOLICO O SUPERFICIE A SELLA (FARE IL DISEGNO)

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = x_3 \end{cases} \quad (0,0,0)$$



paraboloide ellittico

se $x_3 = k > 0$
ellisse

se $x_3 = k < 0$ $\nexists$ INTERSEZIONE!

$\boxed{\text{QUADRICHE DEGENERI}}$

spazi ripetuti

superfici cilindriche

In $\mathbb{R}^2$ $\quad$ ~~[illegible]~~

$$x_1^2 = c > 0$$

$$(x_1 - \sqrt{c})(x_1 + \sqrt{c}) = 0$$

se $c = 0 \Rightarrow x_1^2 = 0$

In $\mathbb{R}^3$ $\quad x_1^2 + x_2^2 = c$

cilindro ellittico

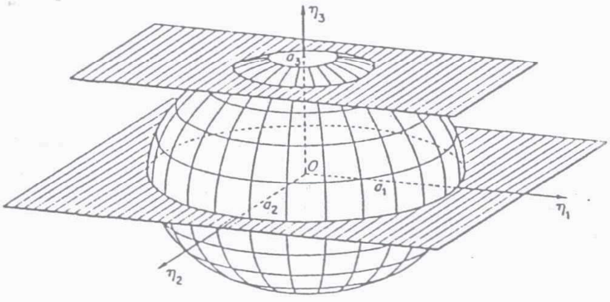
$$x_1^2 - x_2^2 = c$$

cilindro iperbolico

$$x_1^2 = x_2$$

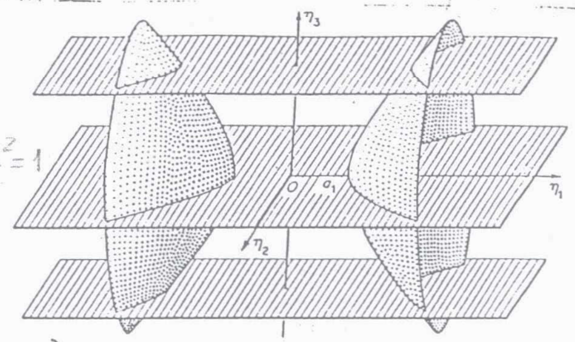
cilindro parabolico

DAL LIBRO DI SHILOV



ELLISSOIDE

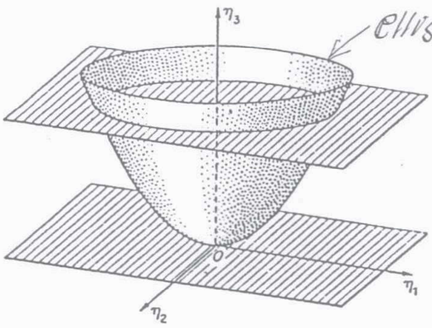
$x^2+y^2+z^2=1$



$x^2-y^2-z^2=1$

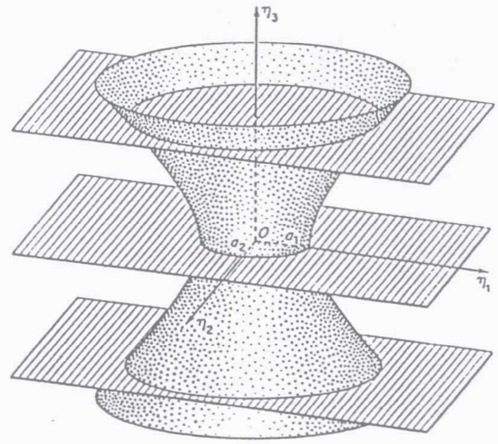
ÌPERBOLOIDE A 2 FALDE

ellisse (sezione piana)



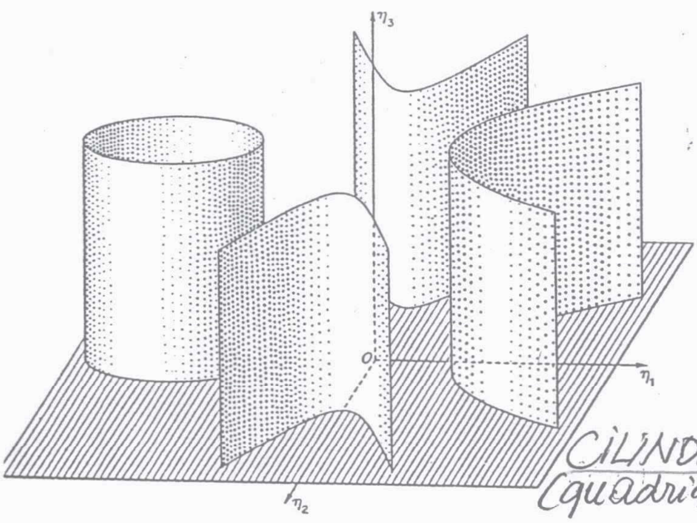
$x^2+y^2=z$

PARABOLOIDE ELLITTICO

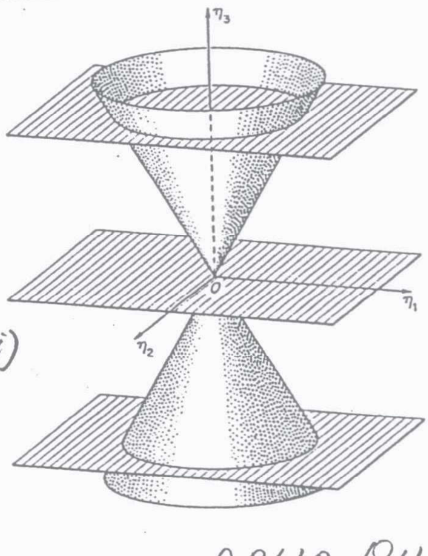


IPERBOLOIDE AD I FALDA

$x^2+y^2-z^2=1$



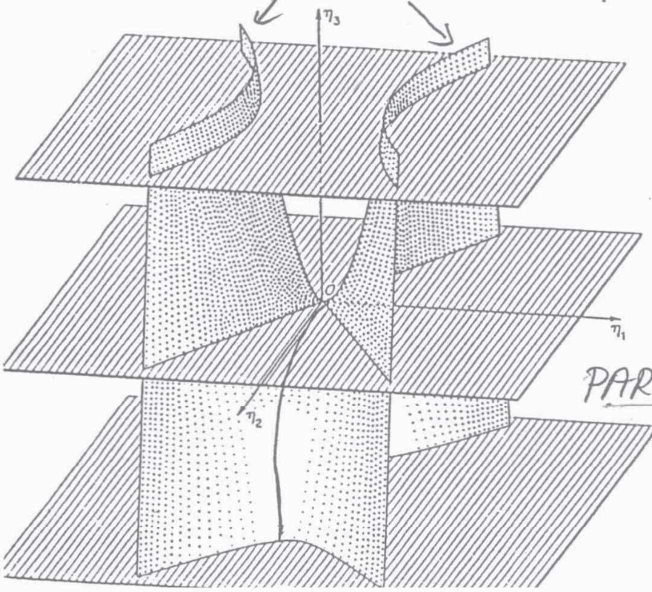
CILINDRI
(quadriche degeneri)



CONO QUADRICO

$x^2+y^2-z^2=0$

iperbole (sezione piana)



$x^2-y^2=z$

PARABOLOIDE IPERBOLICO

O SUPERFICIE A SELLA