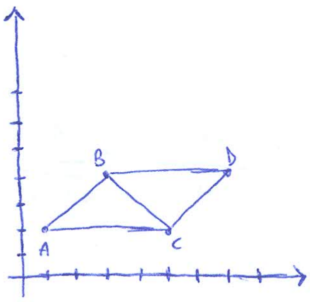
LEZIONE 02/05/2018

ESERCIZIO

Calcolare l'area di un triangolo di vertici $A=(1,2)$, $B=(3,4)$, $C=(5,2)$



Per calcolare l'area del triangolo, si calcola quella del parallelogramma ABCD e la si divide per due.

$v_1 = B-A = (2,2)$
$v_2 = C-A = (4,0)$
$$\Rightarrow Vol(P) = \sqrt{G(v_1,v_2)} = \sqrt{\begin{vmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 16 \end{vmatrix}} =$$
$$= \sqrt{128-64} = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow \text{Area triangolo} = 4$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL DETERMINANTE

Sia $B_{\perp m}$ una base ortonormale in uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ tale che $B_{\perp m}=\{u_1,\dots,u_m\}$ e la matrice $A\in M_{m\times m}$ con $A=(a_{ij})$. Si considerano i vettori colonna $e^1_A,\dots,e^m_A \Rightarrow e^1_A=\sum_{j=1}^m a_{j1}u_j$, $\dots$, $e^k_A=\sum_{j=1}^m a_{jk}u_j \Rightarrow G(e^1_A,\dots,e^m_A)=(b_{hk})_{h,k=1,\dots,m} = (e^h_A\cdot e^k_A) = ((\sum_{j=1}^m a_{jh}u_j)\cdot(\sum_{j=1}^m a_{jk}u_j)) =$

$= (a_{1h}a_{1k}+a_{2h}a_{2k}+\dots+a_{mh}a_{mk})$, ossia la somma dei prodotto delle entrate della h-esima colonna e della k-esima riga. $\Rightarrow (a_{1h}a_{1k}+a_{2h}a_{2k}+\dots+a_{mh}a_{mk}) = A^TA = G(e^1_A,\dots,e^m_A)$.

Il gramiano costruito sui vettori $e^1_A,\dots,e^m_A = |A|^2 \Rightarrow \sqrt{G(e^1_A,\dots,e^m_A)} = ||A|| \Rightarrow$ il valore assoluto del determinante di una matrice è la misura del volume del parallelogramma costruito con le colonne della matrice stessa: $||A|| = Vol(P_{e^1_A,\dots,e^m_A})$

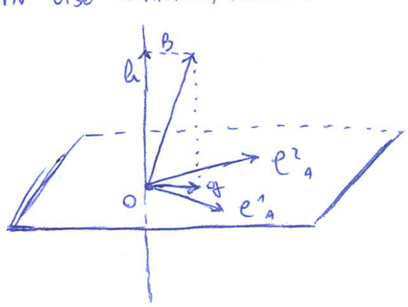
RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI UN SISTEMA NON OMOGENEO

Sia $\Sigma: AX=B$ con $A\in M_{p\times m}(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$.

$$\Downarrow$$

$x_1e^1_A + x_2e^2_A+\dots+x_me^m_A = B \rightarrow B$ deve appartenere al sottospazio generato dalle colonne della matrice A: $B\in \langle\langle e^1_A,\dots,e^m_A\rangle\rangle$

In caso contrario, infatti:

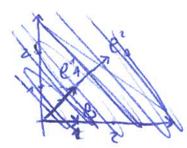


Per dare una soluzione approssimata del sistema, quindi, si considera la proiezione g del vettore B sul sottospazio $\langle\langle e^1_A,\dots,e^m_A\rangle\rangle$ e la si sostituisce al vettore dei termini noti.

L'errore causato da questa approssimazione è dato dalla proiezione h di B sul complemento ortogonale di h.

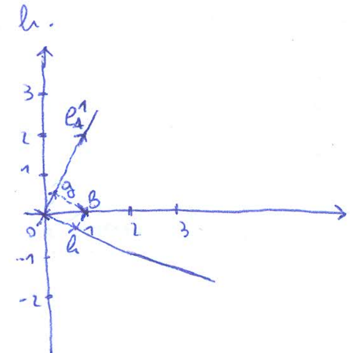
ESEMPIO

$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$



$\alpha = \dfrac{B\cdot e^1_A}{||e^1_A||^2} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow g = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$h = B-g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow ||h|| = \dfrac{\sqrt{20}}{5} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$



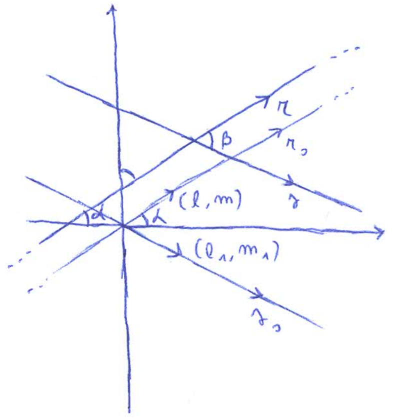
$B\cdot e^1_A = \alpha e^1_A\cdot e^1_A$

$(B-\alpha e^1_A)e^1_A = 0$

$B = g+h = \alpha e^1_A + h$

PROPRIETÀ METRICHE DEL PIANO

DEFINIZIONE: si dicono coseni direttori di una retta r i coseni degli angoli che la retta stessa forma con gli assi coordinati (orientati positivamente).



Dati $v, w \in (\mathbb{R}^n, \text{euclideo}) \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$

l, m sono i parametri direttori di $r \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{(l,m)\cdot(1,0)}{\|(l,m)\|} = \pm \dfrac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}$

$$\cos\beta = \pm \frac{\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}\right\|}$$

$$r \perp s \iff r_0 \perp s_0 \Rightarrow l l_1 + m m_1 = 0$$

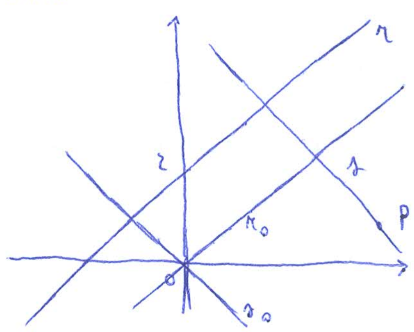
$r: ax + by + c = 0$ $\rightarrow ax = -by \rightarrow x = -\dfrac{b}{a} y$ con $a \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$

$s: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$$r \perp s \iff b b_1 + a a_1 = 0$$

ESEMPIO



$r: -x + y = 2 \qquad P = (4, 1)$

$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$s: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nello spazio:

$$r \perp r' \iff \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix} = 0$$

PERPENDICOLARITÀ RETTA-PIANO

Dato il piano $\pi: ax + by + cz = 0$ si può dare subito l'equazione di una retta sottospazio vettoriale perpendicolare a tale piano, cioè il complemento ortogonale della giacitura del piano.

$\pi_0: ax + by + cz = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è $\perp$ a $\pi_0 \Rightarrow \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \perp \pi_0 \Rightarrow \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \perp \pi$

CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITÀ RETTA-PIANO: siano $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ i parametri direttori di r e $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ i vettori dei coefficienti di π, $r \perp \pi \iff$

$$\iff \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

PERPENDICOLARITÀ FRA PIANI

$\pi_1: a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$

$\pi_2: a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$ $\rightarrow \pi_1 \perp \pi_2 \iff a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

ESERCIZI: distanza di un punto da una retta e da un piano; distanza tra rette sghembe