(GEOMETRIA) prof. Chiavacci — 3.10.2017

STRUTTURE ALGEBRICHE

→ gruppo → anello → campo

! Numero di colonne della prima matrice = Numero di righe della seconda matrice] → condizione per moltiplicazione

- Sia $M_{m \times m}(\mathbb{R})$ (Matrice quadrata) l'insieme delle matrici con (m) righe e (m) colonne.

Tra i suoi elementi possiamo **SEMPRE** eseguire il prodotto riga x colonna.

↓

Analizziamo $(M_{m \times m}(\mathbb{R}), \cdot)$

1. VALE L'ASSOCIATIVITÀ DEL PRODOTTO
2. ∃ ELEMENTO NEUTRO, (E) : deve soddisfare $A = A \cdot E = E \cdot A \quad \forall A \in M_{n \times m}$

ES: $M_{2\times2} \Rightarrow \exists \; E = \underbrace{\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}}_{\text{elementi da trovare}}$ | $\forall A \in M_{2\times2} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A \cdot E = E \cdot A = A}$

lascio (a) generica : → $A \cdot E = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}e_{11} + a_{12}e_{21} & a_{11}e_{12} + a_{12}e_{22} \\ a_{21}e_{11} + a_{22}e_{21} & a_{21}e_{12} + a_{22}e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{uguaglianza tra due matrici}}$

(?) Quando due matrici sono uguali?
- → stesso ordine
- → entrate uguali

quindi ⇒ l'uguaglianza tra matrici si traduce in un **SISTEMA SCALARE**

$$\begin{cases} a_{11}e_{11} + a_{12}e_{21} = a_{11} \\ a_{11}e_{12} + a_{12}e_{22} = a_{12} \\ a_{21}e_{11} + a_{22}e_{21} = a_{21} \\ a_{21}e_{12} + a_{22}e_{22} = a_{22} \end{cases}$$

→ EQ. MATRICIALE tradotta in SISTEMA SCALARE [sistema lineare di (4) equazioni in (4) incognite]

pongo:
$e_{11} = x$
$e_{12} = y$
$e_{21} = z$
$e_{22} = w$

→

SISTEMA ORDINATO
$$\begin{cases} a_{11}x + 0y + a_{12}z + 0w = a_{11} \\ 0x + a_{11}y + 0z + a_{12}w = a_{12} \\ a_{21}x + 0y + a_{22}z + 0w = a_{21} \\ 0x \quad a_{21}y + 0z + a_{22}w = a_{22} \end{cases}$$

→ SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO

SE $z=0$, $x=1$ ⇒ prima eq. è un'IDENTITÀ (III eq)

SE $w=1$, $y=0$ ⇒ Seconda eq. è un'IDENTITÀ (IV eq)

⇓

$(1,0,0,1)$: SOLUZIONE del SISTEMA

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

? Come faccio a sapere se è l'unica soluzione

⇓

$\infty^{\#\text{variabili} - rg}$ [→ SE ∞^0, ALLORA E è l'unica soluzione

Rango

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \sim$$

$\boxed{a_{21}R_1 - a_{11}R_3 \to R_3}$ $a_{21} \neq 0$, $a_{11} \neq 0$

(ciò per cui moltiplico deve essere $\neq 0$)

! (In generale) con il metodo di eliminazione di Gauss non devo MAI moltiplicare per 0.

(→ Ho imposto io $a_{21} \neq 0$ e $a_{11} \neq 0$, non sono necessariamente nulli.)

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11} \end{pmatrix}$$

$\boxed{a_{21}R_3 - a_{11}R_4 \to R_4}$

- Matrice ridotta a gradini.
- $a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} \neq 0 \Longrightarrow rg\, A = 4 \Rightarrow \infty^{4-4} = \infty^0$

$\boxed{\text{L'UNICA SOLUZIONE È LA MATRICE E}}$

⇓

$rg = 4$ quando:
- $a_{21} \neq 0$
- $a_{11} \neq 0$
- $a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} \neq 0$

SE $a_{11} = 0 \not\Rightarrow a_{21}, a_{12} = 0 \not\Rightarrow$

SE $a_{21} \neq 0 \not\Rightarrow \boxed{a_{12} = 0}$

Spiegazione:
- Si analizza ora cosa succede negli altri casi, ovvero quando vengono meno le condizioni che abbiamo imposto per proseguire con il metodo di eliminazione di Gauss.

→

Analisi degli altri casi:

1) SE $a_{11}=0$ $\longrightarrow$? Quando $a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}\neq 0$

$a_{21}a_{12}\neq 0 \Leftrightarrow a_{21}\neq 0$ e $a_{12}\neq 0$

$\Downarrow$

a_{21} a_{12} **DEVONO** essere entrambi $\neq 0$

$$\left[\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & a_{21} \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} & a_{22} \end{array}\right| \begin{array}{l} e_{21}=0 \\ e_{22}=1 \\ a_{21}x+a_{22}z=a_{21} \rightarrow x=1 \\ a_{21}y+a_{22}w=a_{22} \rightarrow y=0 \end{array}\right] \Rightarrow E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) SE $a_{11}=0$ e $a_{21}=0$

3) SE $a_{11}\neq 0$ e $a_{21}=0$

$\Rightarrow$ $\exists$ elemento neutro in $(M_{n\times n}(\mathbb{R}))$: $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ← Matrice quadrata ~~con più~~ diagonale