RIDUZIONE SIMULTANEA (A FORMA CANONICA) DI DUE FORME QUADRATICHE

Date le forme quadratiche $Q_1, Q_2 : V \to \mathbb{R}$, vogliamo determinare una base di V, $\mathcal{B}_V$, tale che $[Q_1]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ e $[Q_2]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}$

! Non è sempre possibile tale riduzione simultanea

→ Esempio: $Q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - x_2^2$ e $Q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 x_2$

tutto dato inizialmente in base canonica

$$[Q_1]_e = [F_{Q_1}]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } F_{Q_1}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

$$\text{simmetrica} \longmapsto [F_{Q_1}]_e = \begin{pmatrix} F_{Q_1}((e_1,e_1)) & F_{Q_1}((e_1,e_2)) \\ F_{Q_1}((e_2,e_1)) & F_{Q_1}((e_2,e_2)) \end{pmatrix}$$

$$[Q_2]_e = [F_{Q_2}]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Supponiamo che esista S invertibile, tale che: $S^T [Q_1]_e S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$

$S^T [Q_2]_e S = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$

Considero la matrice $\lambda [Q_1]_e - [Q_2]_e = \begin{pmatrix} \lambda & -1/2 \\ -1/2 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow S^T(\lambda[Q_1]_e - [Q_2]_e)S = \xrightarrow[\text{DISTRIBUTIVA}]{\text{PROPRIETÀ}} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 - \beta_1 & 0 \\ 0 & \lambda\alpha_2 - \beta_2 \end{pmatrix}$$

i determinanti delle due matrici coincidono

$$|S^T(\lambda[Q_1]_e - [Q_2]_e)S| = (\det S)^2 \det(\lambda[Q_1]_e - [Q_2]_e)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 - \beta_1 & 0 \\ 0 & \lambda\alpha_2 - \beta_2 \end{vmatrix} = (\lambda\alpha_1 - \beta_1)(\lambda\alpha_2 - \beta_2)$$

$$(\det S)^2 \det(\lambda[Q_1]_e - [Q_2]_e) = (\lambda\alpha_1 - \beta_1)(\lambda\alpha_2 - \beta_2)$$

$$\gamma\left(-\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) = \alpha_1\alpha_2\left(\lambda - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\left(\lambda - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)$$

possiamo dividere per $\gamma \ (\neq 0)$

$$-\left(\lambda^2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\gamma}\left(\lambda - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\left(\lambda - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)$$

→ non è possibile trovare radici reali per questo polinomio

Assurdo!

Proposizione : siano $A = [\mathcal{Q}_1]_{B_V}$ e $B = [\mathcal{Q}_2]_{B_V}$ e $\tilde{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V | $[\mathcal{Q}_1]_{\tilde{B}_V} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$, $[\mathcal{Q}_2]_{\tilde{B}_V} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\det(\lambda A - B) = \gamma \prod_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i - \beta_i)} \qquad \gamma \in \mathbb{R}$$

dim

Sia S la matrice tale che $S^T(\lambda A - B)S = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 - \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\alpha_n - \beta_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |\lambda A - \lambda B| = \underset{\substack{\parallel \\ (\gamma)}}{(\det S)^{-2}} \begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 - \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\alpha_n - \beta_n \end{vmatrix}$$

$$|\lambda A - \cancel{\lambda} B| = \gamma \prod_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i - \beta_i) \qquad \text{c.v.d.}$$

Corollario (nelle ipotesi della proposizione) se $\mathcal{Q}_1$ è non degenere, cioè $\det[\mathcal{Q}_1] \neq 0$, $\Rightarrow \boxed{|\lambda A - B| = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j |S|^{-2} \prod_{j=1}^{n} \left(\lambda - \frac{\beta_j}{\alpha_j}\right)}$

$\Rightarrow \frac{\beta_j}{\alpha_j}$ sono le radici caratteristiche di $|\lambda A - B| = 0$

? Quando è possibile rendere simultaneamente diagonali due matrici?

↓

(1) CRITERIO di RIDUZIONE SIMULTANEA A FORMA CANONICA di DUE FORME QUADRATICHE

Siano ~~...~~ $\mathcal{Q}_1 : V \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{Q}_2 : V \to \mathbb{R}$, con $\dim V = n$, forme quadratiche su $\mathbb{R}$. Assumiamo che $\mathcal{Q}_1$ sia non degenere e supponiamo che $|\lambda [\mathcal{Q}_1]_B - [\mathcal{Q}_2]_B| = \gamma \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$ con $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$

$\Rightarrow$ $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ si possono dare simultaneamente in forma canonica.

(radici semplici del polinomio)

dim

- Innanzi tutto dimostriamo che $\exists\, w_1, \dots, w_n \in V$ tali che:

$$\lambda_i F_{a_1}(v, w_i) - F_{a_2}(v, w_i) = 0 \quad , \quad \forall v \in V$$

e

$$[F_{a_1}(w_i, w_i) =]\, a_1(w_i) \neq 0 \quad , \quad \forall i$$

→ condizioni che devono verificare i vettori $w_1, \dots, w_n$

Ciò equivale a determinare un vettore w_i tale che, data una base $\mathcal{B}$ di V, sia soluzione del sistema: $(\lambda_i [F_{a_1}]_{\mathcal{B}} - [F_{a_2}]_{\mathcal{B}})[w_i]_{\mathcal{B}} = 0$

o analogamente $(\lambda_i [a_1]_{\mathcal{B}} - [a_2]_{\mathcal{B}})[w_i]_{\mathcal{B}} = 0$

Tale soluzione esiste ed è diversa da zero perché il $\det|\lambda_i [a_1]_{\mathcal{B}} - [a_2]_{\mathcal{B}}| = 0$ essendo λ_i radice caratteristica del polinomio per ipotesi iniziale.

- Inoltre $a_1(w_i) \neq 0$ perché λ_i è radice semplice, se fosse stata multipla avremmo avuto $a_1(w_i) = 0$.

↳ **INFATTI**: Se $a_1(w_i) = 0 \Rightarrow \lambda_i$ è radice multipla

Dim: prendo $i=1$ senza perdere di generalità.

Considero $\tilde{\mathcal{B}}_V = \{w_1, \dots, w_n\} \Rightarrow [a_1]_{\tilde{\mathcal{B}}_V} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ \hline a_{21} & & & \\ a_{31} & & [a_1]_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & \end{array}\right)$

Poiché $\lambda_1 F_{a_1}(v, w_1) - F_{a_2}(v, w_1) = 0 \rightarrow \lambda F_{a_1}[v, w_1] = F_{a_2}(v, w_1)$

$$\hookrightarrow [a_2]_{\tilde{\mathcal{B}}_V} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} & \dots & \lambda_1 a_{1n} \\ \hline \lambda_1 a_{21} & & & & \\ \lambda_1 a_{31} & & [\ \ ] & & \\ \vdots & & & & \\ \lambda_1 a_{n1} & & & & \end{array}\right)$$

$$|\lambda [a_1]_{\tilde{\mathcal{B}}_V} - [a_2]_{\tilde{\mathcal{B}}_V}| = \left|\begin{array}{c|cccc} 0 & (\lambda-\lambda_1)a_{12} & (\lambda-\lambda_1)a_{13} & \dots & (\lambda-\lambda_1)a_{1n} \\ \hline (\lambda-\lambda_1)a_{21} & & & & \\ (\lambda-\lambda_1)a_{31} & & [\ \ ] & & \\ \vdots & & & & \\ (\lambda-\lambda_1)a_{n1} & & & & \end{array}\right|$$

$$= (\lambda - \lambda_1)^2 \left|\begin{array}{c|cccc} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & & & & \\ a_{31} & & [\ \ ] & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & \end{array}\right|$$

Radice doppia (almeno)

$\Rightarrow \lambda_1$ È RADICE MULTIPLA

c.v.d.

• Dimostriamo ora che $F_{a1}(w_i, w_j) = 0$, $\forall i \neq j$ e $F_{a2}(w_i, w_j) = 0$, $\forall i \neq j$.
(entrate a_{ij} con $i \neq j$ nulle $\Rightarrow$ $[F_{a1}]$ e $[F_{a2}]$ sono matrici diagonali)

Sappiamo che $\lambda_i F_{a1}(v, w_i) - F_{a2}(v, w_i) = 0$, $\forall v \in V$ (pongo $v = w_j$)

$\Rightarrow \lambda_i F_{a1}(w_j, w_i) - F_{a2}(w_j, w_i) = 0$ $\longrightarrow$ per $v = w_j$

$\lambda_j F_{a1}(w_i, w_j) - F_{a2}(w_i, w_j) = 0$ $\longrightarrow$ per $v = w_i$

$$\begin{cases} \lambda_i F_{a1}(w_j, w_i) - F_{a2}(w_j, w_i) = 0 \\ \lambda_j F_{a2}(w_i, w_j) - F_{a2}(w_i, w_j) = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ sistema lineare omogeneo di due equazioni in due incognite

$$\left(\begin{cases} \lambda_i x_1 - x_2 = 0 \\ \lambda_j x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \right)$$

Matrice dei coefficienti: $\begin{pmatrix} \lambda_i & -1 \\ \lambda_j & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

il cui determinante è $\neq 0$ perché:

$\begin{vmatrix} \lambda_i & -1 \\ \lambda_j & -1 \end{vmatrix} = -\lambda_i + \lambda_j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ per ipotesi $\Rightarrow \neq 0$

$\Downarrow$ L'unica soluzione possibile è quella banale

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{matrix} F_{a1}(w_i, w_j) = 0 \\ F_{a2}(w_i, w_j) = 0 \end{matrix}} \quad , \forall i, j = 1, \dots, n, \ i \neq j$$

c.v.d.

• Dimostriamo ora che $\{w_1, \dots, w_n\}$ è base di V, cioè $w_1, \dots, w_n$ sono linearmente indipendenti.

Posto $\sum_{j=1}^{n} a_j w_j = 0 \Rightarrow \boxed{a_j = 0, \forall j}$

$F_{a1}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_j w_j, w_k\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j F_{a1}((w_j, w_k))$ $\longrightarrow$ per la linearità

$\hookrightarrow$ sempre nulle per $j \neq k$

$= a_k F_{a1}((w_k, w_k)) = a_k Q_1(w_k) = 0$

Ma $Q_1(w_k) \neq 0 \Rightarrow a_k \neq 0$, $\forall k$

c.v.d.

IN DEFINITIVA:

$$\Rightarrow [Q_1]_{\tilde{B}_V} = \begin{pmatrix} Q_1(w_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_1(w_1) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_1(w_n) \end{pmatrix}, \quad [Q_2]_{\tilde{B}_V} = \begin{pmatrix} Q_2(w_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q_2(w_2) \end{pmatrix}, \quad \lambda_j = \frac{Q_2(w_j)}{Q_1(w_j)}$$

② CRITERIO DUE

Nelle ipotesi precedenti con $\mathcal{Q}_1$ definita positiva $\Rightarrow$ esiste $\tilde{B}_V$ tale che $\boxed{[\mathcal{Q}_1]_{\tilde{B}_V} = I \quad e \quad [\mathcal{Q}_2]_{\tilde{B}_V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}$

(*) La richiesta che $\mathcal{Q}_1$ sia definita positiva ci riporta ai casi trattati precedentemente, $\Rightarrow$ stiamo dentro uno spazio euclideo dove sappiamo che l'altra matrice è sempre ortogonalmente diagonalizzabile

Basta prendere $(V, F_{\mathcal{Q}_1})$ come spazio euclideo $\Rightarrow [\mathcal{Q}_1]_{\tilde{B}} = I$

$\Rightarrow \tilde{B}$, ortonormale e $[\mathcal{Q}_2]$ si diagonalizza ortogonalmente.

- La stessa cosa vale per $\mathcal{Q}_1$ definita ~~posit~~ negativa, (NA):

$\boxed{[\mathcal{Q}_1]_{\tilde{B}_V} = -I}$

Esempio:

$A = [\mathcal{Q}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = [\mathcal{Q}_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ → diagonalizzabili simultaneamente è possibile?

(non degenere)

$|\lambda A - B| = \lambda^2 + 2\lambda - 1 = (\lambda - (1+\sqrt{2}))(\lambda - (1-\sqrt{2}))$

$\lambda_1 = 1+\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1-\sqrt{2}$ — radici semplici e distinte

~~[illegible]~~ $\lambda_1 = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$ e $\lambda_2 = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}$ $\Rightarrow$ Se pongo $\alpha_1 = 1 \Rightarrow \beta_1 = 1+\sqrt{2}$

Se pongo $\alpha_2 = 1 \Rightarrow \beta_2 = 1-\sqrt{2}$

$\Rightarrow \exists\ \tilde{B}_{\mathbb{R}^2} = \{v_1, v_2\} \ \Big|\ [\mathcal{Q}_1]_{\tilde{B}} = I$ e $[\mathcal{Q}_2] = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Determinare v_1, v_2. cercando una base degli autospazi relativi a λ_1 e λ_2

da sostituire in $|\lambda A - B|$

I due vettori devono essere ortogonali rispetto alle forme polari associate a $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ (~~non~~ rispetto al prodotto scalare standard!!!!) $\Rightarrow v_1$ e v_2 devono quindi essere normalizzati ~~[illegible]~~ tramite la forma polare.