5-12-17

Esercizio: Data $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2z \\ 3x+3y \end{pmatrix}$$

Se ho dominio e ho codominio prendo le basi canoniche

$\Rightarrow [L]_e^e \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e

$$[L]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg[L]_e^e = 2$$

le entrate $\overset{\text{(DELLE RIGHE)}}{}$ corrispondono ai coefficienti dei polinomi CHE DANNO LE COORDINATE DELL'IMMAGINE

$$\begin{pmatrix} 1(x) & 1(y) & 0(z) \\ 0(x) & 0(y) & 2(z) \\ 3(x) & 3(y) & 0(z) \end{pmatrix}$$

dato $v \in$ Dominio di $L = V$

$\Rightarrow v = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j$ con $B_V = \{v_1, \dots, v_m\} \Rightarrow$

$\Rightarrow L(v) \in \operatorname{Im} L \subseteq$ Codominio di $L = W$

per la linearità di L:

$L(v) = L\left(\sum_{j=1}^{m} a_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a_j L(v_j) \Rightarrow L(v_1), \dots, L(v_m)$ generano $\operatorname{Im} L$

$\Rightarrow$ il rango della matrice (# di vettori lin. indipendenti) = dimensione di $\operatorname{Im} L$

$\operatorname{Im} L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ con $\dim \operatorname{Im} L = 2$ (È UN PIANO DI $\mathbb{R}^3$)

EQ. PARAMETRICA

$$\operatorname{Im} L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \; \forall s, t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3s \end{cases}$$

per definizione (combinazione lineare dei vettori generatori)

eliminiamo i parametri

$\Rightarrow$ [in $\mathbb{R}^3$ una sola equazione (#: dim spazio − rg = 3 − 2 = 1) INDIVIDUA UN PIANO

$\boxed{x_3 = 3x_1}$ (→ considerando dalla eq. parametrica $s = x_1$)

EQ. CARTESIANA

Sapendo che il nucleo ha dimensione 1 [retta] ~~xxxxxxxxxxxx~~ PER IL TEOREMA DELLE DIMENSIONI $\Rightarrow$ CERCO LA SUA EQUAZIONE:

cerco $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid L(v) = 0\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ 2z \\ 3x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ 2z = 0 \\ 3x+3y = 0 \end{cases} \Rightarrow$

[$[L]_e^e [v]_e = 0$ $\quad [L(v)]_{B_{cod}} = [L]_{B_D}^{B_C} \cdot [v]_{B_D}$ uguaglianza sempre vera]

$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ 2z = 0 \\ \cancel{3x+3y = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$ RETTA in $\mathbb{R}^3$

multipla della prima equazione: $3(x+y) = 0$ (QUINDI SUPERFLUA!)

nel codominio CAMBIO BASE:

$B_{cod} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (~~[illegible]~~

| Ker L $\begin{cases} x+y=0 \\ 2z = 0 \end{cases}$
| Im L : $x_3 = 3x_1$

Cerco $[L]_e^{B_{cod}}$: $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ (1)

$\rightarrow x_1, x_2, x_3$ saranno le coordinate del vettore 1ª colonna della matrice

combinazione lineare della base nel codominio

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3' \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

x_1', x_2', x_3' SARANNO LE ENTRATE DELLA SECONDA COLONNA

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1'' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2'' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3'' \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

x_1'', x_2'', x_3'' SARANNO LE ENTRATE DELLA TERZA COLONNA: RISOLVO I TRE sistemi lineari non omogenei CHE HANNO LA STESSA MATRICE DEI COEFFICIENTI CONTEMPORANEAMENTE COL METODO DI GAUSS

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} & (1) & (2) \; (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{R_1 - R_2 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2+R_3 \to R}{\sim}$$

$$\underset{R_3+R_2 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & -2 \end{array}\right) \underset{R_1 - R_3 \to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{\frac{R_3}{2} \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

FORMA CANONICA A GRADINI

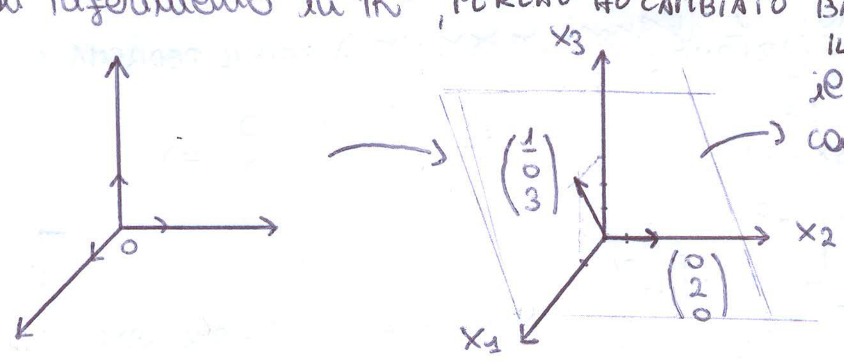
$$\Rightarrow [L]_e^{B_{cod}} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

il rango è ancora 2 (1° e 2° vettore colonna sono lin. dipendenti)

matrice che stavamo cercando

e ad esempio $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ minore con $\det \neq 0$

Ho cambiato sistema di riferimento in $\mathbb{R}^3$, PERCHÈ HO CAMBIATO BASI!



IL SOTTOSPAZIO Im L HA DIMENSIONE 2 il piano è lo stesso, ma avendo cambiato base ottengo equazioni diverse PERCHÈ RIFERITO A COORDINATE DIVERSE

il rango della matrice è invariante. Ce ne sono altri (ASSOCIATE ALLA STESSA APPLICAZIONE LINEARE)

Ad ogni applicazione lineare posso associare una matrice, DOPO AVER FISSATO UNA BASE NEGLI SPAZI VETTORIALI.

Legame tra matrici associate ad applicazioni composte e matrici associate alle applicazioni componenti

Siano $L: V \to W$ e $T: W \to U$ applicazioni lineari;

prendiamo le basi B_V, B_W e B_U $\Rightarrow$ posso dare $[L]_{B_V}^{B_W}$ e $[T]_{B_W}^{B_U}$:

determinata l'applicazione $T \circ L: V \to U$, abbiamo anche $[T \circ L]_{B_V}^{B_U}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Big[(T \circ L)(v)\Big]_{B_U} = [T \circ L]_{B_V}^{B_U} \cdot [v]_{B_V} \qquad (T \circ L)(v) = T(L(v)) \text{ perché composta} \Rightarrow$$

(coordinate del vettore immagine) $\;\|\;$ Prodotto tra matrice associata a $T \circ L$ e vettore delle coordinate in B_V del vettore v. (applico prima L, poi T)

$$\Big[T(L(v))\Big]_{B_U} = [T]_{B_W}^{B_U} \cdot [L(v)]_{B_W} = [T]_{B_W}^{B_U} \cdot [L]_{B_V}^{B_W} \cdot [v]_{B_V} = [T \circ L]_{B_V}^{B_U} [v]_{B_V}$$

Prodotto delle due matrici · vettore delle coordinate B_V

dunque $[T]_{B_W}^{B_U} \cdot [L]_{B_V}^{B_W} = [T \circ L]_{B_V}^{B_U}$

Abbiamo dimostrato che la matrice associata all'applicazione composta $T \circ L$ è data dal prodotto della matrice associata a T per la matrice associata ad L (facendo attenzione all'ordine del prodotto, non commutativo fra matrici)

~~[illegible]~~

Se cambio le basi, cambio la matrice: COSTRUIAMO IL DIAGRAMMA DI FUNZIONI:

$$\begin{tikzcd}
(V, B_V) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "id_V"'] & (W, B_W) \arrow[d, "id_W"] \\
(V, \tilde{B}_V) \arrow[r, "L"] & (W, \tilde{B}_W)
\end{tikzcd}$$

$v \longmapsto L(v)$

$v \longmapsto L(v)$

(associo a V una sua base B_V)

$\Rightarrow$ ho la matrice $[L]_{B_V}^{B_W}$

$L = id_W \circ L \circ id_V$ prodotto di tre matrici diverse!

$\Rightarrow$ ho la matrice $[L]_{\tilde{B}_V}^{\tilde{B}_W}$

DIAGRAMMA COMMUTATIVO "↻"
(facendo giri diversi, torno allo stesso VETTORE IMMAGINE)

$$L(v) = id_W\big(L(\underbrace{id_V(v)}_{=v})\big)$$

[PIÙ CHIARO NELLA PAGINA SEGUENTE →]

→ DIAGRAMMA COMMUTATIVO

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[r, mapsto] & L(v) \\
(V, B_V) \arrow[r] & (W, B_W) \arrow[d, "id_W"] \\
(V, \tilde{B}_V) \arrow[u, "id_V"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & (W, B_W) \\
v \arrow[r, mapsto] & L(v)
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow [L]^{B_W}_{B_V}$

$\Rightarrow [L]^{\tilde{B}_W}_{\tilde{B}_V}$

$$L = id_W \circ L \circ id_V$$

Le matrici associate alle due applicazioni id non è detto che siano la matrice identità I, ma sono da calcolare.

Le matrici associate ~~equivalgono~~ (ALL'IDENTITÀ) ad I quando B_W e B_V sono uguali (anche con le basi canoniche)

$$[L]^{\tilde{B}_W}_{\tilde{B}_V} = [id_W]^{\tilde{B}_W}_{B_W} \cdot [L]^{B_W}_{B_V} \cdot [id_V]^{B_V}_{\tilde{B}_V}$$