6/12/2017 

Data una matrice, vogliamo associarla ad una app. lineare.

Sia $Hom(V,W) = \{L : V \longmapsto W, \text{ lineari}\}$ = insieme degli Homomorfismi da V in W.

$$\phi : Hom(V,W) \longrightarrow M_{p\times n}(\mathbb{R})$$
$$L \longmapsto [L]^{B_W}_{B_V}$$

Posto $p = \dim W$, $n = \dim V$

data una applicazione lineare, siamo in grado di associare una matrice. Possiamo fare il contrario?

Chiamiamo $\Phi$ l'APPLICAZIONE da $Hom(V,W)$ in $M_{p\times n}$

—o—

Diamo l'applicazione $M_{p\times n}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\Psi} Hom(V,W)$

$$A \longmapsto \Psi(A) = L : V \longrightarrow W$$
$$[v]_{B_V} \longmapsto A\cdot[v]_{B_V}$$

X CASA (DA DIMOSTRARE)

mostriamo che: 1 $Hom(V,W)$ è spazio vett.

2 $\phi$ è un morfismo di spazi vettoriali (CIOÈ UN'APPLICAZIONE LINEARE)

TALE CHE $\Phi(L_1+L_2) = \phi(L_1) + \phi(L_2)$

$$\Phi(\alpha L) = \alpha\Phi(L)$$

Potremmo dimostrare che $\Psi = \varphi^{-1}$ ($\Longrightarrow$ $\varphi$ è biettiva PERCHÈ INVERTIBILE)

cioè che $\psi\circ\varphi = id_{Hom(V,W)}$ e $\varphi\circ\psi = id_{M_{p\times n}} \Longrightarrow (\varphi\circ\psi)(A) =$
$= \varphi(\psi(A)) = A$

—o—o—

Ricordiamo che se sono date $L : V \to W$ e $T : W \to U$ lineari,
$\Longrightarrow$ Se $[L]^{B_W}_{B_V}$ e $[T]^{B_U}_{B_W}$ sono le matrici associate NELLE BASI DATE,
$\Rightarrow [T\circ L]^{B_U}_{B_V} = [T]^{B_U}_{B_W}\cdot[L]^{B_W}_{B_V}$; Allora se L è invertibile ed $L^{-1}$ è la sua inversa, che legame c'è tra $[L]^{B_W}_{B_V}$ e $[L^{-1}]^{B_V}_{B_W}$?

Sappiamo che $L \circ L^{-1} = id_W$ (l'identità è su $W$, perchè $L$ viene applicata per prima).

$$\Rightarrow [L \circ L^{-1}] = [L]^{B_W}_{B_V} \cdot [L^{-1}]^{B_V}_{B_W} = [id_W]^{B_W}_{B_W} = I \text{ (POICHÈ LE BASI SONO UGUALI)}$$

$$(W, B_W) \xrightarrow{L^{-1}} (V, B_V)$$

e anche:

$$[L^{-1} \circ L] = [L^{-1}]^{B_V}_{B_W} \cdot [L]^{B_W}_{B_V} = [id_V]^{B_V}_{B_V} = I$$

$\Rightarrow$ Siccome il prodotto tra $[L]$ e $[L^{-1}]$ è l'identità $I$, allora ~~queste due matrici~~ $[L^{-1}]$ è la matrice inversa di $[L]$

POICHÈ $[L] \cdot [L]^{-1} = I \Rightarrow [L^{-1}]^{B_V}_{B_W} = \left([L]^{B_W}_{B_V}\right)^{-1}$

-o-o-o-o-o-o-

Data una matrice $p \times n$, questa può essere associata a infinite applicazioni lineari, A SECONDA DELLE BASI SCELTE NEGLI SPAZI VETTOR.

ESEMPIO:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2} \Longrightarrow L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ È L'APPLICAZIONE ASSOCIATA:

supponiamo di prendere le basi canoniche di $\mathbb{R}^2$; ALLORA:

$$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$$

ma se supponiamo di prendere ALTRE basi, per esempio prendiamo $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ nel codominio, ALLORA NON POSSIAMO DARE L'APPLICAZIONE COME PRIMA:

$$L: (\mathbb{R}^2, e) \xrightarrow{L} (\mathbb{R}^2, B), \text{ CON } [L]^B_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

come determiniamo $L$, con la sua matrice?

Possiamo DARE $L$ solo con le basi canoniche:

$$(\mathbb{R}^2, e) \xrightarrow{L} (\mathbb{R}^2, e) \text{ con } [L]^e_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

possiamo sfruttare il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
(\mathbb{R}^2, e) \arrow[r, "L"] & (\mathbb{R}^2, B) \arrow[d, "\tilde{id}_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow [id_{\mathbb{R}^2}]^e_B"] \\
(\mathbb{R}^2, e) \arrow[u, "{[id]^e_e = I_{2\times 2}}"] \arrow[r, "L"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{R}^2, e)
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{id} \circ L \circ id_{\mathbb{R}^2} = L \qquad \text{INFATTI} : \tilde{id}(L(id(v))) = \tilde{id}(L(v)) = L(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

$$\Longrightarrow [L]^e_e = [\tilde{id}_{\mathbb{R}^2}]^e_B \cdot [L]^B_e \cdot [id_{\mathbb{R}^2}]^e_e =$$

POICHÉ $[\tilde{id}_{\mathbb{R}^2}]^e_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $[id_{\mathbb{R}^2}]^e_e = I \Rightarrow$

$$\Longrightarrow = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = [L]^e_e$$

PERTANTO POSTO $[v]_e = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ABBIAMO

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x + 10y \\ -x - 2y \end{pmatrix}$$

facciamo un'altro esempio:

Dove è l'app. lin. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con base in $\mathbb{R}^2$, Dominio di $L$,

$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e base in $\mathbb{R}^2$, codominio, $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

e matrice associata $[L]^{B_2}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
(\mathbb{R}^2, B_1) \arrow[r, "L"] & (\mathbb{R}^2, B_2) \arrow[d, "id_2 \Rightarrow [id_2]^e_{B_2}"] \\
(\mathbb{R}_2, e) \arrow[u, "{[id]^{B_1}_e \Leftarrow id_1}"] \arrow[r, "L"] \arrow[ur, phantom, "* \; id_2 \circ L \circ id_1 = L"] & (\mathbb{R}^2, e)
\end{tikzcd}$$

con $[L]^{B_2}_{B_1}$

con $[L]^e_e = ?$

$$[id_2]^{e}_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

perchè si ...

COMBINAZIONE LINEARE

$$id\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

siccome la base è canonica, i coefficienti della combinazione lineare, sono le coordinate

$$\Sigma_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

si traduce in un sist. scalare.

$$\Sigma_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

si trovano le soluzioni, tramite eliminazione di GAUSS. (ad esempio)

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Soluzioni dei 2 sistemi $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$

$$\Rightarrow [id_1]^{B_1}_{e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$* [id_2]^{e}_{B_2} \circ [L]^{B_2}_{B_1} \circ [id_1]^{B_1}_{e} = [L]^{e}_{e}$$

$$[L]^{e}_{e} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y \\ -2x+2y \end{pmatrix}$$