07/05/2018 ~ GEOMETRIA

Sia $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un operatore su uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

Vogliamo studiare particolari operatori che interagiscono con il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

Dato T si dice AGGIUNTO di T (e si indica con T^*) l'operatore

$T^*: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $T(u) \cdot v = u \cdot T^*(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

- Consideriamo il caso di un operatore $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, biettivo t.c. $T^* = T^{-1}$ e il caso di un operatore T per il quale $T^* = T$

Nel primo caso T è detto isometrico: quindi un operatore è detto isometrico se è biettivo e $\forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad T(u) \cdot v = u \cdot T^{-1}(v)$

Lascia invariata la metrica: del dominio - la trasporta nel codominio, lascia invariata la distanza tra punti, lunghezza vettori e ampiezza angoli.

Proposizione: se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è isometrico $\Rightarrow$ ~~dato~~ $\forall v \in \mathbb{R}^n$,

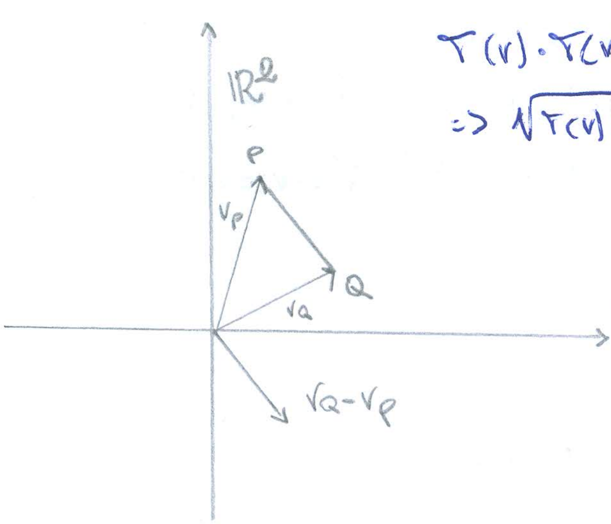
① $\|T(v)\| = \|v\|$.

② Inoltre presi due punti $P, Q \in \mathbb{R}^n$ $d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$

Dimostrazione: ① $\|T(v)\| = \sqrt{T(v) \cdot T(v)}$; poiché $T(v) \cdot T(v) = v \cdot T^{-1}(T(v)) \Rightarrow$

$T(v) \cdot T(v) = v \cdot v$ (perché T è invertibile, quindi iniettiva)

$\Rightarrow \sqrt{T(v) \cdot T(v)} = \sqrt{v \cdot v} = \|v\|$



② Nel dominio:

2D $d(P, Q) = \|v_Q - v_P\|$

Nel codominio:

$d(T(P), T(Q)) = \|V_{T(Q)} - V_{T(P)}\| = \|T(v_Q) - T(v_P)\| =$

$= \|T(v_Q - v_P)\| = \|v_Q - v_P\|$

c.v.d. si mantiene la distanza tra i punti

③ Se α è l'angolo tra i vettori v e u $\Rightarrow$ α è l'angolo tra $T(v)$ e $T(u)$

Sappiamo che $\cos \widehat{uv} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \Rightarrow \cos \widehat{T(u)T(v)} = \frac{T(u) \cdot T(v)}{\|T(u)\| \|T(v)\|} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} =$

$= \cos \widehat{uv}$. Infatti: $T(u) \cdot T(v) = u \cdot T^{-1}(T(v)) = u \cdot v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

$\rightarrow$ si mantiene anche l'angolo!

Proposizione: Se $\mathcal{U}$ è invariante per $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ISOMETRICO $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ è invariante per T^{-1}, con $\mathcal{U} \leq \mathbb{R}^n$ (SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^n$)

DIMOSTRAZIONE $\rightarrow$ $\mathcal{U}$ è invariante per T se $T(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$.
Voglio dimostrare che $T^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$:
essendo T biettivo $T(T^{-1}(\mathcal{U})) \subseteq T(\mathcal{U}) \Rightarrow \mathcal{U} \subseteq T(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow$
$\Rightarrow T(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \Rightarrow \underline{T^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}}$

Proposizione: Se $\mathcal{U}$ è un sottospazio invariante per T $\Rightarrow$ $\mathcal{U}^\perp$ è invariante per T

DIM: per ipotesi $T(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow$ se prendo $u \in \mathcal{U}$ e $v \in \mathcal{U}^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = \underbrace{T(u) \cdot v}_{\text{ortogonali}} = u \cdot T^{-1}(v) \Rightarrow T^{-1}(v) \in \mathcal{U}^\perp$

Essendo $u \cdot T^{-1}(v) = 0 \Rightarrow T^{-1}(v) \in \mathcal{U}^\perp \Rightarrow \mathcal{U}^\perp$ è invariante per T^{-1} $\Rightarrow$ $\mathcal{U}^\perp$ è un invariante per T $\boxed{\text{c.v.d.}}$

Quali sono gli autovalori di un operatore ISOMETRICO?
Un vettore v è un autovettore relativo all'autovalore λ se $T(v) = \lambda v$
Con $v \neq 0$, $\Rightarrow T(v) \cdot T(v) = v \cdot v \Rightarrow \forall v$ autovettore $\in \mathbb{R}^n$ $\lambda^2 (v \cdot v) = (v \cdot v) \Rightarrow$

$\lambda v \cdot \lambda v = \lambda^2 v \cdot v$

numero reale non nullo

$\Rightarrow$ dividendo per $v \cdot v \neq 0$ si ha $\lambda^2 = 1$
$\Rightarrow$ i possibili autovalori per T sono $\boxed{\lambda = 1}$ e $\boxed{\lambda = -1}$

Proposizione: Dato $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, isometrico e v, w autovettori relativi ad autovalori diversi $\Rightarrow v \cdot w = 0$

DIM: So $T(v) = v$ e $T(w) = -w$ $\Rightarrow T(v) \cdot T(w) = v \cdot (-w) = -v \cdot w$
$ \overset{\shortparallel}{v \cdot w}$

$\Rightarrow v \cdot w = 0$, cioè i vettori sono perpendicolari

2) Sia $B_{\perp n}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ cerco $[T]_{B_{\perp n}}$. Siano

$v, w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow [v]_{B_{\perp n}}$ e $[w]_{B_{\perp n}}$ sono i vettori delle coordinate

nella base data $\Rightarrow [T(v)]_{B_{\perp n}} = [T]_{B_{\perp n}} \cdot [v]_{B_{\perp n}}$ e $[T(w)]_{B_{\perp n}} = [T]_{B_{\perp n}} \cdot [w]_{B_{\perp n}}$

$T(v) \cdot T(w) = [T(v)]^T_{B_{\perp n}} \cdot M \cdot [T(w)]_{B_{\perp n}} =$ (dove M e' la matrice del prodotto scalare nella base $B_{\perp n} \Rightarrow M = I$)

$= [T(v)]^T_{B_{\perp n}} \cdot I \cdot [T(w)]_{B_{\perp n}} = [T(v)]^T_{B_{\perp n}} \cdot [T(w)]_{B_{\perp n}} = ([T]_{B_{\perp n}} \cdot [v]_{B_{\perp n}})^T \cdot [T]_{B_{\perp n}} \cdot [w]_{B_{\perp n}}$

$= [v]^T_{B_{\perp n}} \cdot [T]^T_{B_{\perp n}} \cdot [T]_{B_{\perp n}} \cdot [w]_{B_{\perp n}} = [v]^T_{B_{\perp n}} I [w]_{B_{\perp n}} = [v]^T_{B_{\perp n}} [w]_{B_{\perp n}}$

POICHE' abbiamo $v \cdot w = T(v) \cdot T(w) =$

$= [v]^T_{B_{\perp n}} I [w]_{B_{\perp n}}$

→ Deduciamo che $[T]^T_{B_{\perp n}} [T]_{B_{\perp n}} = I \Rightarrow [T]_{B_{\perp n}}$ E' UNA MATRICE ORTOGONALE!

→ Se A e' ortogonale $\Rightarrow$ vettori riga e vettori colonna della Matrice A sono ortonormali (ortogonali l'uno all'altro con indici diversi e con il prodotto scalare ottengo 1)

→ Le radici reali caratteristiche di una matrice ortogonale sono $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ (da fare)

Op. isometrici su $\mathbb{R}$

$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad T(x) = \lambda x$ dove $\lambda = -1$ o $\lambda = 1$

$x \longmapsto x$ (IDENTITA')

oppure

$x \longmapsto -x$ (SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE)

ORTONORMALE ↑

Op. isom. in $\mathbb{R}^2$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ considero la base canonica $\mathcal{C}$ in $\mathbb{R}^2$ e studio $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases} \overset{b \neq 0}{\quad} \begin{cases} a = -\frac{cd}{b} \\ \frac{c^2 d^2}{b^2} + c^2 = 1 \\ '' \end{cases} \quad \begin{cases} c^2(d^2 + b^2) = b^2 \Rightarrow \\ \\ '' \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{-cd}{b} \\ c^2 = b^2 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c = b \\ \text{o} \\ c = -b \end{cases}$$

Se $c=b$

$$\begin{cases} a=-d \\ c=b \\ b^2+a^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

è il determinante!

Se $a=\cos\theta$ e $b=\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Se $c=-b$

$$\begin{cases} a=d \\ c=-b \\ b^2+a^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Se $a=\cos\theta$ e $b=\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$b=0$

$$\begin{cases} cd=0 \Rightarrow c=0 \\ d^2=1 \quad \begin{matrix} d=1 \\ d=-1 \end{matrix} \\ a^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$a=1 \qquad a=-1$

combinazioni:

$a=1;\ d=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ① ; $a=1;\ d=-1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ② $a=-1;\ d=1$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $a=-1;\ d=-1$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ④

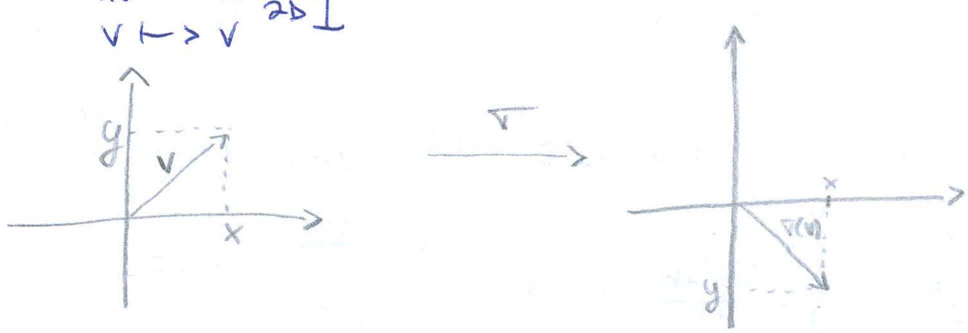
che con $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ ⑤ e $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ⑥

sono le isometrie nel piano

COMBINAZIONE

① $id\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto v \Rightarrow I$

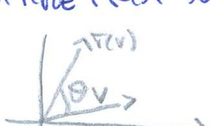
②



SIMMETRIA rispetto asse x

③ SIMMETRIA rispetto asse y

⑥



ROTAZIONE di θ

4 Caso particolare di 6 con $\pi = \theta$ 2D rotazione di π

5 Composizione di due matrici:

$$\underset{2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{6}{\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

combinazione tra simmetrie assiali e rotazioni

Quindi in $\mathbb{R}^2$ abbiamo solamente: - SIMMETRIE ASSIALI;
E ROTAZIONI;

OGNI ISOMETRIA DEFINITA DA OPERATORI IN $\mathbb{R}^2$ È COMPOSIZIONI DI ESSE.

Nota: ora stiamo considerando degli operatori isometrici, cioè le applicazioni (studiabili con matrici) LINEARI ISOMETRICHE;

OLTRE QUELLE DEFINITE DA OPERATORI, ANCHE LE TRASLAZIONI SONO TRASFORMAZIONI ISOMETRICHE DEL PIANO