07/11/17 Cambiamento di base

è necessario utilizzare una matrice di cambio di base

Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale e
$B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ basi di V
cerchiamo la matrice del cambio di base

Dato un vettore $v \in V \Rightarrow v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$

e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [v]_{B_1}$ è il vettore delle coordinate di v

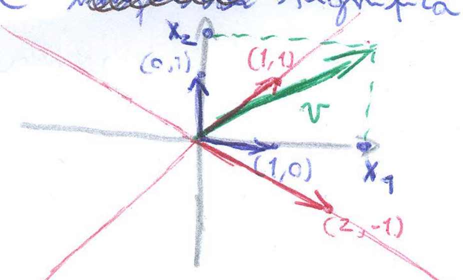
nella base B_1, se considero B_2 base di $V \Rightarrow$

lo stesso vettore v sarà dato $v = \sum_{i=1}^{n} y_i w_i \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = [v]_{B_2}$

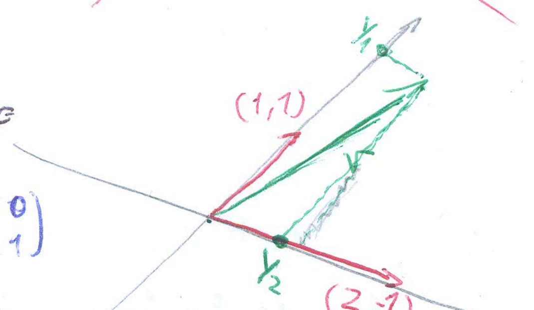
esempio $V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = C_{\mathbb{R}^2}$

$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Geometricamente parlando, dare la base C significa dare il seguente riferimento su $\mathbb{R}^2$
(SEGNATO IN NERO)



Cambiare base significa lasciare il vettore invariato e agire sul sistema di riferimento
v è rimasto lo stesso
cerchiamo quindi le relazioni tra le coordinate DEL VETTORE v RIFERITE A BASI DIVERSE



$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

RISOLVENDO IL SISTEMA

$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha_1 \\ 1 = \alpha_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = \beta_1 \\ -1 = \beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [w_1]_C$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = [w_2]_C$

POSSIAMO anche esprimere gli ELEMENTI di C come combinazione lineare degli elementi di B_2

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 0 = \alpha - \alpha_2 \end{cases}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \beta_1 + 2\beta_2 \\ 1 = \beta_1 - \beta_2 \end{cases}$

i 2 sistemi hanno la stessa matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

arrivando alla matrice (RIDOTTA A GRADINI IN FORMA CANONICA) ~~[illegible]~~, nella matrice completa si troveranno le soluzioni dei 2 sistemi NELLE COLONNE DEI TERMINI NOTI

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & \underbrace{0}_{Sol\,\Sigma_1} & \underbrace{1}_{Sol\,\Sigma_2}\end{array}\right) \overset{R_1-R_2\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & -1\end{array}\right)$$

il rango dei sistemi (perchè stessa mat. dei coeff) è $2 \to \infty^{2-2} = 1$ sol

$3R_2 - 2R_1 \to R_1$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}3 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -1 & -1\end{array}\right)$$

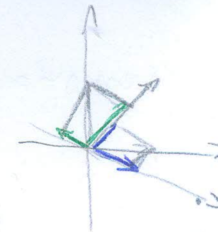
$R_1/3 \to R_1$

$R_2/3 \to R_2$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc|cc} & & \alpha_1 & \beta_1\\ \hline 1 & 0 & 1/3 & 2/3\\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3\\ \hline & & \alpha_2 & \beta_2\end{array}$$

$(e_1, e_2$ VETTORI DELLA BASE CANONICA$)$

$$\Longrightarrow [e_1]_{B_2} = \begin{pmatrix}1/3\\ 1/3\end{pmatrix} \qquad [e_2]_{B_2} = \begin{pmatrix}2/3\\ -1/3\end{pmatrix}$$



$[v]_C = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ mentre $[v]_{B_2} = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$

$[v]_{B_2} = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ sono i coefficienti della combinazione lineare

$v = y_1 w_1 + y_2 w_2$ conosco $v = x_1 \cdot e_1 + x_2 e_2$

abbiamo $[e_1]_{B_2}$ e $[e_2]_{B_2}$ $\Longrightarrow$ $v = x_1\begin{pmatrix}1/3\\ 1/3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2/3\\ -1/3\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = y_1\\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 = y_2\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}1/3 & 2/3\\ 1/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

ora $[v]_C = \begin{pmatrix}3/2\\ 2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1/3 & 2/3\\ 1/3 & -1/3\end{pmatrix}}_{\text{matrice cambiamento di base}}\underbrace{\begin{pmatrix}3/2\\ 2\end{pmatrix}}_{\text{coordinate nella base di partenza}} = \begin{pmatrix}1/2 + 4/3\\ 1/2 - 2/3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}11/6\\ -1/6\end{pmatrix}}_{\text{coordin[ate] nella base di arriv[o]}}$$

07/11/2017

Come calcolare la mat. del c. di base?

Date 2 basi B_1 e B_2 nello spazio vettoriale V, la matrice del cambiamento di base per passare dalla base B_1 alla base B_2 è la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori della base B_1 espressi come combinazione lineare dei vettori della base B_2.

Tale matrice si scrive $M_{B_1}^{B_2}$ matrice da B_1 a B_2 $M_{\text{partenza}}^{\text{arrivo}}$

nella maggior parte dei testi però si trova come $M_{B_2}^{B_1}$ $\rightarrow M_{\text{arrivo}}^{\text{partenza}}$

per cui $\boxed{[v]_{B_2} = M_{B_2}^{B_1} [v]_{B_1}}$

Dato Σ_0 sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite

$Sol\ \Sigma_0$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

Siano W_1 e W_2 sottoinsiemi di uno spazio V

considero $W_1 \cap W_2$ e $W_1 \cup W_2$ $\Rightarrow$ sono anch'essi sottoinsiemi di V

Se W_1 e W_2 sono sottospazi di V $\Rightarrow$ $W_1 \cap W_2$ e $W_1 \cup W_2$ sono anch'essi sottospazi di V?

$W_1 \cap W_2 = \{ v \in V \quad v \in W_1 \text{ e } v \in W_2 \}$

* $\exists$ l'elemento neutro

* CON i VETTORI OTTENUTI le operazioni date, prendendo elementi del sottoinsieme, rimanendo al sottoinsieme

$0 \in W_1 \cap W_2$ perché $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$

presi u_1 e $u_2 \in W_1 \cap W_2$

1) $u_1 + u_2 \in W_1 \cap W_2$? $\longrightarrow u_1 + u_2 \in W_1 \cap W_2 \Longleftrightarrow u_1 + u_2 \in W_1$ e $u_1 + u_2 \in W_2$

2) $\lambda u_1 \in W_1 \cap W_2$? $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

oppure $\boxed{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2} \in W_1 \cap W_2 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall u_1, u_2 \in W_1 \cap W_2$

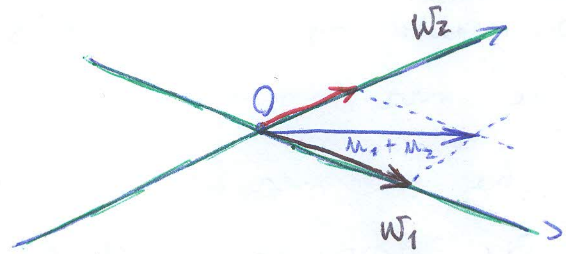
$u_1 + u_2 \in W_1$ perché $u_1, u_2 \in W_1$ e W_1 è sottospazio

$u_1 + u_2 \in W_2$ perché $u_1, u_2 \in W_2$ e W_2 è sottospazio

$\lambda u_1 \in W_1 \cap W_2 \Longleftrightarrow \lambda u_1 \in W_1$ e $\lambda u_1 \in W_2$

vero perché W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali

per $W_1 \cup W_2$ si può fare un esempio:
si prendono 2 rette ~~...~~ in $\mathbb{R}^2$



l'insieme $W_1 \cup W_2$

u_1 e u_2

$u_1 + u_2$

$u_1 + u_2$ non $\in W_1 \cup W_2 \Rightarrow W_1 \cup W_2$ non è sottospazio vettoriale

ma qual è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene $W_1 \cup W_2$
Tale sottospazio dovrà contenere la somma e i prodotti per uno scalare di tutti i vettori contenuti in $W_1 \cup W_2$
esso si indica $W_1 + W_2$ ed è detto $\boxed{\text{SOMMA}}$ DEI 2 SOTTOSPAZ

$$W_1 + W_2 = \{ v \in V \text{ tali che } v = w_1 + w_2 \text{ con } w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2 \}$$

osservazione

$$W_1 \leq W_1 + W_2 \quad \text{e} \quad W_2 \leq W_1 + W_2$$

è sottospazio di

Se $W_1 \cap W_2 = \{0\} \Rightarrow$ la loro somma si dice diretta e si indica così: $W_1 \oplus W_2$

<u>Teorema di Grassman</u>: se W_1 e W_2 sono sottosp. di $V \Rightarrow$

$$\dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1 + W_2)$$