09/04/2018 GEOMETRIA 1

ESERCIZIO (riduzione di forma quadratica alla forma canonica)

cambio la base nello spazio in una in cui la mia forma è espressa ~~solo~~ con termini al quadrato.

$Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$

• Cerco la matrice associata nella base canonica in $\mathbb{R}^3$.

$$[Q]_e = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$$

È una matrice simmetrica reale.

$\Rightarrow$ dimezzo il COEFFICIENTE del termine con x_1x_2 e lo metto nelle corrispondenti posizioni nella matrice: a_{12} E LO STESSO TERMINE SARÀ MESSO IN a_{21}

lo stesso faccio per x_1x_3: DETERMINO $a_{13} = a_{31} = \frac{\text{COEFFICIENTE DI } x_1x_3}{2}$

x_2x_3 NON compare, quindi metto uno 0 IN a_{23} E UNO ZERO IN a_{32}. LA FORMA BILINEARE SIMMETRICA

$F((x,y)) \mid F((x,x)) = Q(x)$ è la polare della mia forma quadratica

$$F((x,y)) = \frac{Q(x,y) - Q(x) - Q(y)}{2}$$

2 → ecco perché non posso usarla in campi di caratteristica 2, ma in $\mathbb{R}$ posso, perché ha caratteristica 0.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow F((x,y)) = \Big[(x_1+y_1)^2 - 4(x_1+y_1)(x_2+y_2) + 2(x_1+y_1)(x_3+y_3) + 4(x_2+y_2^2) + (x_3+y_3)^2 - x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2^2 - x_3 - y_1^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2^2 - y_3^2\Big]\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow F((x,y)) = \frac{1}{2}\Big(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 - 4x_1x_2 - 4x_1y_2 - 4y_1x_2 - 4y_1y_2 + 2x_1x_3 + 2x_1y_3 + 2y_1y_3 + 2y_1x_3 + 4x_2^2 + 4y_2^2 + 8x_2y_2 + x_3^2 + y_3^2 + 2x_3y_3 - \dots\Big)$$

$$\Rightarrow F((x,y)) = \frac{1}{2}\Big(2x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4y_1x_2 \overset{+2x_1y_3}{\cancel{+2x_1x_3}} + 2y_1x_3 + 8x_2y_2 + 2x_3y_3\Big)$$

2

$\Rightarrow F((X,Y)) = x_1y_2 - 2x_1y_2 - 2y_1x_2 + x_1y_3 + y_1x_3 + 4x_2y_2 + x_3y_3$

(La matrice associata alla forma polare é la stessa associata alla relativa forma quadratica nella stessa base).

$\Rightarrow$ Per trovare la forma bilineare simmetrica associata posso (ANCHE) sfruttare la matrice associata alla quadratica nella base canonica.

$$X^T[Q]_e Y = F((X,Y))$$

Studio le proprietà, che sono le stesse per la forma bilineare e quadratica:

$\mathrm{Det}(Q_e) = -4 \Rightarrow$ la forma quadratica é NON DEGENERE

$\Downarrow$

~~[illegible]~~ nella diagonale della matrice associata nella nuova base avrò tutti termini $\neq 0$.

Cerco la SEGNATURA:

- Il metodo di Jacobi mi dice che se tutti i minori di nord-ovest sono $\neq 0$

$$[Q]_c \sim_c \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \frac{d_2}{d_1} & \\ & & \frac{d_3}{d_2} \end{pmatrix} \quad d_2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Non posso usare questo metodo perché avrei un determinante nullo

- Devo scrivere la forma quadratica in forma canonica con il metodo di Gauss (riduzione in quadrati):

- Comincio dal primo termine al quadrato (AD ESEMPIO x_1^2) e raccolgo: x_1 FRA GLI ALTRI TERMINI

$$\Rightarrow \underbrace{x_1^2 + 2(-2x_2 + x_3)x_1}_{\text{riduco a un quadrato}} + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$[x_1 + (-2x_2 + x_3)]^2 - \underbrace{(-2x_2 + x_3)^2}_{\text{l'ho sottratto per avere l'uguaglianza con la forma di partenza.}} + 4x_2^2 + x_3^2$$

$\Rightarrow [x_1 + (-2x_2 + x_3)]^2 + 4x_2x_3$ Ora cambio le coordinate

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

ottengo: $Q(y)$:

$$\Rightarrow y_1^2 + \underbrace{4y_2y_3}_{\text{ho un termine misto che devo ridurre a quadrato}}$$

$\Downarrow$

③

$$\Rightarrow y_1^2 + \underbrace{(y_2+y_3)^2 - (y_2-y_3)^2}_{\text{questo é il termine misto.}}$$

Cambio ulteriormente coordinate:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2+y_3 \\ z_3 = y_2-y_3 \end{cases} \Rightarrow Q(z) = z_1^2 + z_2^2 \cancel{+} - z_3^2 \Rightarrow$$ la segnatura sará $(2,1)$ poiché ho due termini positivi e uno negativo.

$\Rightarrow$ la matrice diagonale data dal teorema di Silvester sará $[Q]_C \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = [Q]_B$ $\leftarrow$ nuova base

[NB: Questa forma bilineare non é definita positiva, quindi non ho un prodotto scalare.]

• La nuova base cercata (B) (in cui la forma quadratica é scritta con solo termini al quadrato) si trova MEDIANTE IL CAMBIAMENTO DI coordinate DALLE originali (x_1, x_2, x_3) ALLE FINALI (z_1, z_2, z_3).

In totale ho fatto il seguente cambiamento di coordinate:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

DETERMINATO COMPONENDO I CAMBIAMENTI DI COORDINATE EFFETTUATI.

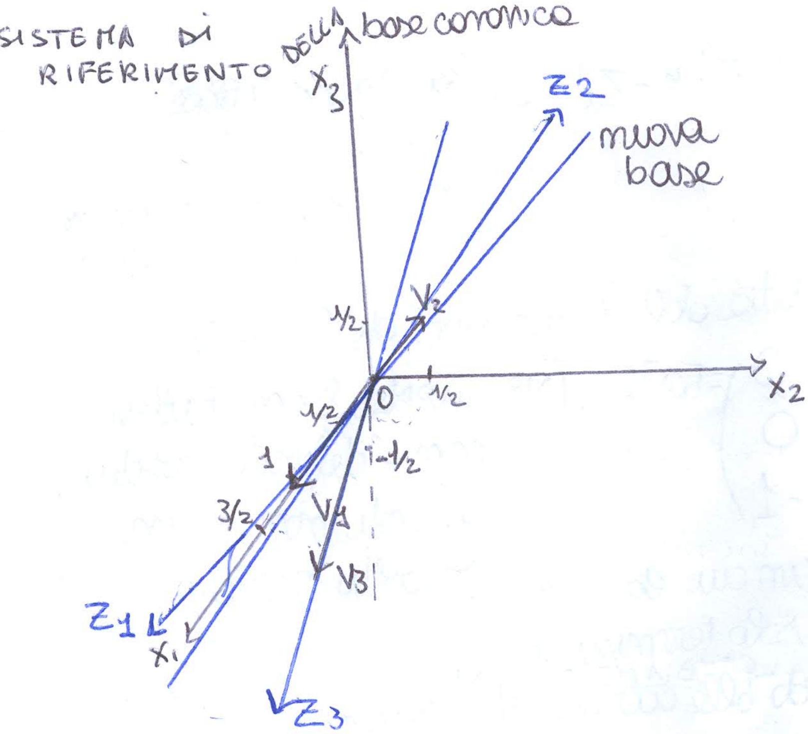
– So dal teorema di Silvester che questa base B é F-ortogonale, cioé i vettori di base a due a due, sostituiti ai VETTORI x, y della forma bilineare, mi danno $\underline{0}$.

CERCO LA BASE (rispetto ad essa la matrice é la $[Q]_B$ trovata): le coordinate dei vettori della base B cercata determinano le colonne della matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base B alla base canonica C.

Cioé $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [id]_B^C \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

④ Devo cercare l'inversa di quella ottenuta dalle coordinate z:

cioè $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = S$ $\qquad S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1/2 & 3/2\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$ e le colonne di questa matrice sono le coordinate dei vettori della nuova B espressi nella base canonica.



$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} \right\}$$

- POSSO UTILIZZARE UN ALTRO METODO → sfruttando il polinomio caratteristico associato alla matrice. TUTTAVIA diagonalizzando la matrice, la diagonale trovata sarà SIMILE alla prima, non congruente, infatti il metodo si basa sulle applicazioni LINEARI. ⇒ avrò $D = S^{-1}AS$ e NON $D = S^TAS$ ~~dato~~ posso trovare una matrice S che abbia $S^T = S^{-1}$ e si chiama

<u>MATRICE ORTOGONALE</u> = matrice quadrata invertibile $A \in M(\mathbb{R})_{n\times n} \mid A^T = A^{-1}$ o
(definizione)
ugualmente $A^TA = I$.

In questo modo la matrice diagonale ottenuta sarà simile, ma anche congruente a quella di partenza e rispetterà quindi le regole per associarla a una forma bilineare simmetrica e alla sua quadratica, ma anche a un operatore. IN UNA NUOVA BASE

- Le colonne di una matrice ORTOGONALE sono vettori ortonormali rispetto alla forma quadratica euclidea.

5 ESEMPIO:

$q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ Devo studiarla e ridurla in forma canonica.

$A = [q]_e = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \to$ simmetrica, reale

PROPOSIZIONE

tutte le matrici simmetriche reali hanno $\boxed{\text{solo}}$ radici caratteristiche REALI

DIMOSTRAZIONE: Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica $\Rightarrow |A - \lambda I| = 0$ è il polinomio caratteristico di cui cerco le radici.

$\Rightarrow$ suppongo che $\exists\ \lambda_0$ sua radice caratteristica $\Rightarrow \exists$ una soluzione del sistema $AX = \lambda_0 X$. Detta C tale soluzione ho $AC = \lambda_0 C$ e suppongo C complessa (cioè le coordinate di C sono numeri complessi).

Sia $\bar{C}$ la sua coniugata, calcolo $\bar{C}^T A C = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i a_{in}\right) C$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i a_{ij}\right) c_j \Rightarrow \bar{C}^T A C = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{c}_i a_{ij} c_j$

ma $AC = \lambda_0 C \Rightarrow \bar{C}^T \lambda_0 C = \lambda_0 \bar{C}^T C = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i c_i$ che è un numero reale in quanto somma dei prodotti tra un complesso e il suo coniugato.

$\Rightarrow \alpha\lambda_0 = \lambda_0 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i c_i}_{\alpha \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow \lambda_0 = \dfrac{\sum_{i,j=1}^{n} \bar{c}_i a_{ij} c_i}{\alpha}$ DIMOSTRO CHE $\bar{C}^T A C = \overline{\bar{C}^T A C}$ cioè che il complesso $\bar{C}^T A C$ è uguale al suo coniugato $\Rightarrow$ che è reale:

$\overline{\bar{C}^T A C} = C^T \bar{A} \bar{C}$ siccome A è simmetrica il suo coniugato coincide con la matrice stessa $\Rightarrow \overline{\bar{C}^T A C} = \bar{C}^T A C$

⑥ $\bar{C}^T A C = (\bar{C}^T A C)^T = C^T A^T \bar{C} = C^T A \bar{C}$

$\Rightarrow$ ho dimostrato l'uguaglianza, perciò $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ C.V.D

per simmetria di A

Ritornando all'esempio:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ho una forma DEGENERE, il determinante è nullo.

le radici sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$ con molteplicità uno.

la matrice diagonale associata è $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q(y) = 2y_1^2$ è la forma canonica della forma quadratica.

la matrice del cambiamento di base

$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ed è <u>ortogonale</u>

↳ trovata tramite gli autovettori.

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = I$ cioè $S^T S = I$

In conclusione $\Rightarrow$ Per trovare la forma canonica di una forma quadratica posso sfruttare anche la diagonalizzazione.