TEOREMA DI STRUTTURA PER GLI OPERATORI ISOMETRICI

sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatore isometrico $\Rightarrow \exists\, B_{\perp n}$ ortonormale di $\mathbb{R}^n$ $\mid$

$$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc|cccc} 1_1 & & 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & & 0 & & \\ 0 & & 1 & & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & 0 & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & 0 & & \\ & & & 0 & & -1 & & & & \\ \hline & & & & & & M_1 & & & 0 \\ & 0 & & & 0 & & & M_2 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & & & M_K \end{array}\right)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad i \qquad\qquad\quad j$$

con
$$M_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$
con $k = 1, \dots, K$

(sono matrici di rotazione)

per induzione su n: il più piccolo $n = 1$ (retta)

1) verifica per $n=1$ abbiamo $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ identità
$X \mapsto X$ $\quad [T]_C = (1)$

verificato per $n = 1$

$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ simmetria
$X \mapsto -X$ $\quad [T]_C = (-1)$

per $n=2$ (COME GIÀ STUDIATO: ABBIAMO SIMMETRIE ASSIALI E ROTAZIONI)

la simmetria ~~per~~ su un asse ha $[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

la rotazione ha $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2) supponiamo vero fino alla dimensione $n-1$ e dimostriamo per $\mathbb{R}^n$

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatore isometrico $\quad (T(u) \cdot v = u \cdot T^{-1}(v))$

supponiamo esistono autovalori reali per $T \Rightarrow$ si ha solo $\lambda = +1$ o $\lambda = -1$

supponiamo $\lambda = +1 \Rightarrow$ sia $v \neq 0$ tale che $T(v) = v$
$\Rightarrow$ considero $V = \langle\langle v \rangle\rangle$

V è sottospazio con dim $= 1$, invariante per T

prendo $V^{\perp} \Rightarrow \dim(V^{\perp}) = n-1$ ed è invariante per T

prendo $T\big|_{V^\perp} \quad V^\perp \to V^\perp$ isometrico sullo spazio $(n-1)$-dimensionale

T ristretto a V ortogonale

$\Downarrow$

$\exists$ per ipotesi una base $B_{V^\perp}$ ortonormale tale che

$$[T|_{V^\perp}]_{B_{\perp n}} = \left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} M_1 & & 0 \\ & M_2 & \\ 0 & & \ddots M_k \end{matrix} \end{array}\right)$$

estendo tale base ad una base B di $\mathbb{R}^n$ in questo modo: $\Leftarrow$

$$B = \left\{\frac{v}{\|v\|}\right\} \cup B_{V^\perp}$$

$\left.\begin{array}{l} v \in V \\ B_{V^\perp} \in V^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ è ortogonale a tutta $B_{V^\perp}$

essendo $B_{V^\perp}$ ortonormale e $\frac{v}{\|v\|}$ di norma 1, $\Rightarrow B$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

e

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0\ 0\ 0 & 0\ 0 & 0\ 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} M_1 & 0 \\ 0 & \ddots M_k \end{matrix} \end{array}\right)$$

per $\lambda = -1 \to T(v) = -v$ ma tutto il ragionamento rimane invariato fino alla matrice

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0\ 0\ 0\ 0 & & \\ 0 & I & & \\ 0 & & -I & \\ 0 & & & M \ddots M \end{pmatrix}$$

ma basta PORRE IL VETTORE $\frac{v}{\|v\|}$ all'$(i+1)$esimo POSTO NELLA BASE B E LA matrice risulta COME RICHIESTA. (questo perché la base rimane comunque ortonormale) ~~[illegible]~~ QUINDI:

posto $B_{V^\perp} = \{v_1, \dots v_{n-1}\} \Rightarrow$ prendo $B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \frac{v}{\|v\|}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$

Essendo $\mathbb{C}$ algebricamente chiuso, ci possono essere autovalori complessi SE NON ESISTONO AUTOVALORI REALI

supponiamo non ci siano autovalori reali $\Rightarrow$ sono tutti complessi

sia $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$ UN AUTOVALORE COMPLESSO

il ragionamento è simile a quello dei reali, ma il sottospazio di dimensione minima generato ~~da~~ AUTOVETTORI, HA DIMENSIONE 2.

posto $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tale che $A = [T]_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ base di $\mathbb{R}^n$

$|A - \lambda_0 I| = 0$ poiché λ_0 radice CARATTERISTICA

posso determinare l'autospazio relativo a λ_0

$$(A - \lambda_0 I)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{con } z_j = x_j + i y_j \in \mathbb{C}$$

$$(A - \lambda_0 I)\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right]$$

sono n-uple reali $\rightarrow (A - \lambda_0 I)(X + iY) = 0$

$X \neq 0$ e $Y \neq 0$ perché sono reali e le soluzioni sono nel campo complesso

$$AX - (\alpha + i\beta)X + iAY - i(\alpha + i\beta)Y = 0$$

$$AX - \alpha X - i\beta X + iAY - \alpha i Y + \beta Y = 0$$

$$AX - \alpha X + \beta Y + i(AY - \alpha Y - \beta X) = 0$$

$$\begin{cases} AX - \alpha X + \beta Y = 0 \\ AY - \beta X - \alpha Y = 0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ un numero complesso è pari a 0 quando la parte reale e la parte complessa sono contemporaneamente 0

$$\begin{cases} AX = \alpha X - \beta Y \\ AY = \beta X + \alpha Y \end{cases} \qquad A = [T]_{\mathcal{B}}$$

quindi $AX = [T(X)]_{\mathcal{B}}$

$$\begin{cases} \text{coordinate del vettore immagine di } X = \alpha X - \beta Y \\ \text{" " " " di } Y = \beta X + \alpha Y \end{cases}$$

nella base $\mathcal{B}$

QUINDI se $V = \langle\langle X, Y \rangle\rangle$ si ha $T(V) \subseteq V$

cioè che V è invariante per $T \Rightarrow T|_V \; V \to V$ è ancora isometrico

ora dimostro che $\dim(V) = 2$

supponiamo che $Y = \mu X$ (non lin ind) con $\mu \neq 0$

$$\begin{cases} AX = \alpha X - \beta \mu X \\ A\mu X = \beta X + \alpha \mu X \end{cases} \longrightarrow \cdot\mu \begin{cases} \mu AX = \mu\alpha X - \mu^2 \beta X \\ \mu AX = \beta X + \mu \alpha X \end{cases}$$

$$\cancel{\mu \alpha X} - \mu^2 \beta X = \beta X + \cancel{\mu \alpha X}$$

$$\beta X + \mu^2 \beta X = 0 \qquad \beta X (1 + \mu^2) = 0$$

β non può essere $= 0$ come non lo può essere X

quindi $1 + \mu^2 = 0$, ma in $\mathbb{R}$ non ha senso

$\Rightarrow$ X e Y <u>non</u> sono linearmente dipendenti

quindi $[T|_V]_{\mathcal{B} = \{X, Y\}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

è ortogonale poiché $\alpha\beta - \beta\alpha = 0 \quad \forall \alpha, \beta$

e $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (determinante) perché α e $\beta = \lambda_0$ È AUTOVALORE DI MODULO PARI A 1.

dimostriamo ora che $X \cdot Y = 0$:

$T|_V(X) \cdot X = X \cdot (T|_V)^{-1}(X)$ poiché $T|_V$ è isometrico

$(\alpha X - \beta Y) \cdot X = X \cdot (\alpha X + \beta Y)$

se $T|_V(X) = \alpha X - \beta Y$

e $T|_V(Y) = \beta X + \alpha Y$

allora

$$\begin{cases} X = \alpha (T|_V)^{-1}(X) - \beta (T|_V)^{-1}(Y) \\ Y = \beta (T|_V)^{-1}(X) + \alpha (T|_V)^{-1}(Y) \end{cases}$$

$\hookrightarrow (T|_V)^{-1}(X) = (\alpha X + \beta Y)$

attraverso vari passaggi

$\beta (X \cdot Y) = 0$

β non può essere 0 perché parte immaginaria di λ_0

quindi X e Y sono ortogonali

prendo $\mathcal{B}_V = \left\{ \frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|} \right\}$ è base ortonormale di V

considero $V^\perp \Rightarrow \dim(V^\perp) = n-2 \Rightarrow$ per ipotesi induttiva

$\exists\, \mathcal{B}_{V^\perp}$ ortonormale tale che

$$[T|_{V^\perp}] = \left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_k \end{matrix} \end{array}\right)$$

aggiungendo la base $\mathcal{B}_V$ in opportuni spazi

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1, \dots, \frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|}, v_{j+1}, \dots v_n \right\}$$

tale che $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I & & 0 \\ & -I & \\ 0 & & \begin{matrix} M_1 & \\ & \ddots M_k \end{matrix} \end{pmatrix}$ quindi in uno spazio di dimensione n con autovalori complessi

$\exists$ UNA BASE ORTONORMALE RISPETTO ALLA QUALE LA MATRICE ASSOCIATA È QUELLA RICHIESTA $\boxed{\text{cvd}}$

---

in $\mathbb{R}^3$ abbiamo $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$