10 Ottobre 2017

DETERMINANTE: proprietà

0. Se una riga o una colonna sono formate da soli zeri $\Rightarrow$ il determinante è nullo

1. Se una riga (colonna) di una matrice quadrata è multipla di un'altra riga (colonna) $\Rightarrow$ il suo determinante è nullo

ESEMPIO DI CONFERMA:

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0 \quad (\mathrm{II}R \text{ multipla } \mathrm{I}R)$$

2. Se in una matrice A si scambiano tra loro due righe (colonne) $\Rightarrow$ il determinante della nuova matrice è l'opposto di detA [si usa un'operazione elementare riga]

3. Se in una matrice quadrata sostituiamo una riga (colonna) con un suo multiplo rispetto allo scalare $k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ il determinante della nuova matrice è K volte quello precedente

ESEMPIO DI CONFERMA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 4-6 = -2 \Rightarrow B \overset{3\mathrm{I}R \to \mathrm{I}R}{=} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 12-18 = -6 \Rightarrow (-2)(3) = -6$$

4. Se sostituiamo una riga R_j con una sua combinazione lineare del tipo $R_j + kR_\ell$, $k \in \mathbb{R}$, R_ℓ altra riga $\in$ matrice ~~[illegible]~~, il determinante della matrice rimane invariato

Se la combinazione lineare è $\lambda R_j + kR_\ell \Rightarrow$ il determinante della matrice risulta moltiplicato per λ.

$\boxed{R_j + kR_\ell} \to$ operazione elementare determinantale: SE SOSTITUIAMO LA COMBINAZIONE LINEARE ALLA RIGA R_j

ESEMPIO: uso il metodo di eliminazione di Gauss per ridurla a gradini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{-3R_1+R_3 \to R_3}{\overset{R_1+R_2 \to R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -10 \end{pmatrix} \overset{7R_2+3R_3 \to R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

questa matrice avrà determinante $(\det A) \cdot 3$ ed è ridotta a gradini e il suo $\mathrm{rg} A = 3$

scelgo la prima colonna per il metodo di Lagrange

matrice triangolare superiore $\Rightarrow$ basta calcolare gli elementi della diagonale principale tra loro per trovare il determinante

$$\Rightarrow \det A = \frac{15}{3} = \boxed{5}$$

Osservazione:

Per calcolare il determinante di matrici diagonali, triangolari sup e inferiori, basta moltiplicare gli elementi della diagonale principale. cioè $\det A = \prod_i a_{ii}$

Teorema di BINÉT

Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Se data la matrice quadrata $A \in M_{n\times n}$ $\exists$ la sua inversa $B \in M_{n\times n}$ $\Rightarrow$ per definizione di elemento reciproco o inverso della nostra matrice

si ha che $A \cdot B = B \cdot A = I$ (elemento neutro dell'operazione)

$\Rightarrow$ per il teorema di Binét $|A \cdot B| = |B \cdot A|$

$$\underset{|A|\cdot|B|}{|A\cdot B|} = \underset{|B|\cdot|A|}{|B\cdot A|}$$

Poiché $|A \cdot B| = |I| = 1$ perché la matrice I ha sulla diagonale principale solo 1

$\Rightarrow |A| \cdot |B| = 1$

Pertanto se A è invertibile $\Rightarrow |A| \neq 0$ I° Osservazione

e il $\det B = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

II° Osservazione
ovvero conoscendo il $\det A$ posso trovare quello della sua inversa A^{-1}
e $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

Definizione di RANGO a partire dal determinante: [Rango coincide con CARATTERISTICA]

Def. di SOTTOMATRICE

Data una matrice A qualunque $\in M_{p\times n}$ si dice SOTTOMATRICE di A una matrice ottenuta togliendo da A righe e/o colonne.

ESEMPIO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 4}$ Tolgo la 1° riga e la 1° e 3° colonna rimane: $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ sottomatrice di A, in particolare una matrice quadrata di ordine 2

Ogni elemento della matrice è una sottomatrice di A, perché si ottiene togliendo le altre righe e colonne.
Ogni entrata della matrice è una sottomatrice di ordine 1
Da una matrice 3x4 possiamo trovare 18 sottomatrici di ordine 2, e 4 sottomatrici di ordine 3.

DEF:
Data $A \in M_{p\times n}$ si dice RANGO di A l'ordine massimo della sottomatrice quadrata con determinante $\neq 0$.
(cioè l'ordine massimo dei minori non nulli; DOVE DEFINIAMO "MINORE" IL DETERMINANTE DI UNA SOTTOMATRICE QUADRATA)

Proposizione: il rango appena definito coincide con il rango = numero di pivot della matrice ridotta a gradini.

DEF:
minore = determinante della sottomatrice quadrata ~~[illegible]~~ ~~([illegible])~~

Osservazione:

1. Se A è una matrice $M_{n \times n}$ e $\det A \neq 0 \Rightarrow$ il rango di A è n
2. e A è equivalente alla matrice I $(n \times n)$ $\begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_n \end{pmatrix}$

Proprietà 5 del determinante.

Data A e $A^T \Rightarrow$ preso $A, A^T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$; $\Rightarrow \det A^T = \det A$

Parlando di TRASPOSIZIONE di matrici, vediamo il legame con le operazioni

cioè: • siano $A, B \in M_{p \times n}$ $\Rightarrow$ considero $A+B \in M_{p \times n}$ $\Rightarrow (A+B)^T \in M_{n \times p}$ e inoltre

$(A+B)^T = A^T + B^T$

• siano $A \in M_{p \times n}$ e $B \in M_{n \times q}$ $\Rightarrow A \cdot B \in M_{p \times q}$ $\Rightarrow (AB)^T = B^T A^T$

$\left(A^T \in M_{n \times p} \text{ e } B^T \in M_{q \times n} \Rightarrow B^T \cdot A^T \in M_{q \times n} \text{ e } (AB)^T \in M_{q \times n} \right)$

DIMOSTRAZIONE

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$ $B = (b_{\ell m})_{\substack{\ell=1,\dots,n \\ m=1,\dots,q}}$ $A \cdot B = (c_{rs})_{\substack{r=1,\dots,p \\ s=1,\dots,q}}$ calcolata secondo la definizione di moltiplicazione riga per colonna

Faccio le trasposte di $A \cdot B$, A, B

Calcolo il prodotto e verifico che ottengo una matrice con elementi c_{rs} $_{\substack{r=1,\dots,p \\ s=1,\dots,q}}$

Esercizio: dimostrare che $(A \cdot B)^T = B^T A^T$ per $A \in M_{2 \times 2}$ e $B \in M_{2 \times 3}$