11/04/18

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n (ISOMORFO A $\mathbb{R}^n$) e sia $F: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare reale simmetrica definita positiva.
$\Rightarrow (V;F)$ è detto SPAZIO EUCLIDEO ed una tale forma F è detta PRODOTTO SCALARE.

1

Esempi di spazi euclidei:

1) $V = \mathbb{R}^3$ e $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$((x,y)) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{con } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ e } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo: CHE F È UN PRODOTTO SCALARE:

- È una forma bilineare perché

$$\left.\begin{array}{l} F((x_1+x_2, y)) = F((x_1,y)) + F((x_2,y)) \\ F((\alpha X, y)) = \alpha F((x,y)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

linearità sulla prima componente
(e linearità sulla seconda componente) ANALOGAMENTE

o più semplicemente perché l'immagine è espressa da un polinomio omogeneo di 2° grado, espresso nelle ~~vettori~~ coordinate MISTE del dominio.

- F è simmetrica $\Leftrightarrow F((x,y)) = F((y,x)) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^3$

$$F((y,x)) = y_1x_1 + y_2x_2 + y_1x_1$$

Si può verificare anche tramite la matrice

$$[F]_e = \begin{pmatrix} F((e_1,e_1)) & F((e_1,e_2)) & F((e_1,e_3)) \\ F((e_2,e_1)) & F((e_2,e_2)) & F((e_2,e_3)) \\ F((e_3,e_1)) & F((e_3,e_2)) & F((e_3,e_3)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice simmetrica reale $\Rightarrow$ F è simmetrica

- F definita positiva $\Rightarrow F((x,x)) > 0 \quad \forall x \neq 0$

$$F((x,x)) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0 \text{ vero per}$$

la sua segnatura è $(3,0)$

$\Rightarrow (V;F)$ è spazio euclideo

Esempio

2) In $\mathbb{R}^2$ considero $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

Verificare che $(\mathbb{R}^2; F)$ è spazio euclideo

3) Sia $V = R[x]_2$ = insieme dei polinomi di grado massimo 2 su $\mathbb{R}$.
È uno spazio vettoriale reale di dim $= 3$
Insieme $\{1, x, x^2\}$ è una base di $\mathbb{R}[x]_2$

In $\mathbb{R}[x]_2$ considero la seguente forma:

$$F: \mathbb{R}[x]_2 \times \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}$$
$$(p,q) \mapsto \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

Verifichiamo:

- bilinearità: 1. $F((p_1+p_2,q)) = F((p_1,q)) + F((p_2,q))$

  2. $F((\alpha p,q)) = \alpha F((p,q))$

1. $\int_{-1}^{1} [(p_1+p_2)q](x)\,dx = \int_{-1}^{1}(p_1q)(x)\,dx + \int_{-1}^{1}(p_2q)(x)\,dx$

2. $\int_{-1}^{1} \alpha(pq)(x)\,dx = \alpha\int_{-1}^{1}(pq)(x)\,dx$

(ANALOGAMENTE $F((p,\beta_1q_1+\beta_2q_2)) = \beta_1F((p,q_1)) + \beta_2F((p,q_2))$)

- F def. pos. $\Rightarrow F((p,p)) > 0 \quad \forall p \neq 0$

  $\int_{-1}^{1} p^2(x)\,dx \quad > 0$ sempre perché $p^2(x)$ sempre positivo e ~~[illegible]~~

4) $\mathcal{C}^0_{[a,b]} = \{ f\,[a,b] \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$ (ha base infinita)

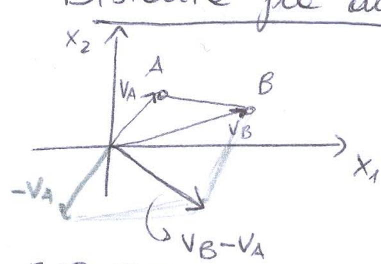
$$F: \mathcal{C}^0_{[a,b]} \times \mathcal{C}^0_{[a,b]} \to \mathbb{R}$$
$$(f,g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

In uno spazio euclideo $(V;F)$ posso misurare i vari elementi di tale spazio. Ad esempio la lunghezza di un vettore $v \in V$ (CIOÈ LA SUA NORMA)

norma di v $\to$ $\|v\| = \sqrt{F(v,v)} = \sqrt{Q(v)}$

vale perché è positiva sempre

Distanza fra due punti di V:



$$d(A,B) = \sqrt{Q(v_B - v_A)} = \|v_B - v_A\|$$

ESEMPIO:

Se in $\mathbb{R}^2$ considero il prodotto scalare standard $x \cdot y \; (= \langle x,y \rangle) = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$

$Q(x) = x \cdot x = \sum_{i=1}^{2} x_i^2$. Nell'esempio $v_A = \begin{pmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \end{pmatrix}$ e $v_B = \begin{pmatrix} x_{1B} \\ x_{2B} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_B - v_A = \begin{pmatrix} x_{1B} - x_{1A} \\ x_{2B} - x_{2A} \end{pmatrix} \Rightarrow d(A,B) = \sqrt{Q(v_B - v_A)} = \sqrt{(x_{1B}-x_{1A})^2 + (x_{2B}-x_{2A})^2}$

<u>Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:</u>

[Dati due vettori $v, w \in (\mathbb{R}^n$, euclideo$) \Rightarrow |v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$]

Dimostrazione:

caso 1) v e w linearm. dip., cioè $w = \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |v \cdot \alpha v| = |\alpha| \cdot |v \cdot v|$$

$$\|v\| \cdot \underbrace{\|\alpha v\|}_{= \sqrt{\alpha v \cdot \alpha v}} = \|v\| \cdot |\alpha| \cdot \underbrace{\sqrt{v \cdot v}}_{= \|v\| \text{ norma}} = |\alpha| \cdot \|v\|^2 = |\alpha| \cdot |v \cdot v|$$

(valore assoluto)

Caso 2) v e w lin. indip. $\Rightarrow$ Sia $U := \langle\langle v, w \rangle\rangle \leq \mathbb{R}^n$. Considero PRODOTTO SCALARE RISTRETTO AD U E DIAMO LA MATRICE ASSOCIATA NELLA BASE $\{u, w\}$ di U:

$$\left[v \cdot w |_U \right]_B = \begin{pmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix}$$

matrice non degenere e poiché $v \cdot w$ è definito pos. $\Rightarrow \overset{\text{det}}{(v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)(w \cdot v)} > 0$

$$(v \cdot w)^2 < (w \cdot w)(v \cdot v) \Rightarrow (v \cdot w)^2 < \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$|v \cdot w| < \|v\| \cdot \|w\|$$

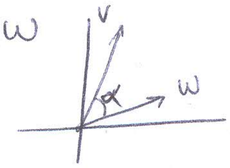
c.v.d.

Conseguenza

$$\frac{|v \cdot w|}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

$\Downarrow$

può essere considerato come $\cos \alpha$ con α angolo convesso formato dai vettori v e w



CON $-\pi < \alpha \leq \pi$ $(0 < \alpha \leq \pi)$

$\Rightarrow v \cdot w = \cos \alpha \, \|v\| \cdot \|w\|$ $\Rightarrow$ riusciamo a misurare gli angoli

DEF: [Diciamo <u>PERPENDICOLARI</u> due vettori se l'angolo convesso da essi formato è di $\frac{\pi}{2}$

<u>Proposizione</u>: Due vettori v non nulli in $\mathbb{R}^n$ euclideo sono perpendicolari $\Leftrightarrow$ essi sono F-ortogonali (F è il prodotto scalare)

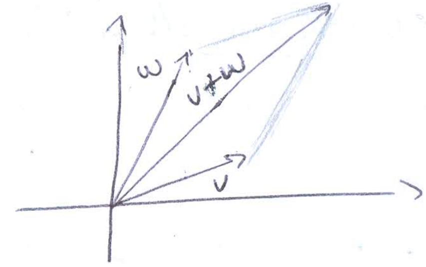
Verifica:

Se v è perpendicolare a w $\Rightarrow$ l'angolo da essi formato α è $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = 0 \Leftrightarrow v \cdot w = 0$$

Viceversa se $\underset{\text{ortogonale}}{v \perp w} \Rightarrow v \cdot w = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ (essendo $0 \leq \alpha \leq \pi$)

Disuguaglianza triangolare:



$$\boxed{\text{Dati } v, w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|}$$

Dim:

$$\|v+w\|^2 = (v+w)\cdot(v+w) = v\cdot v + v\cdot w + w\cdot v + w\cdot w = \underbrace{\|v\|^2 + 2\, v\cdot w + \|w\|^2 \leq}_{\|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2}$$

$$\boxed{\text{Se } v \perp w \Rightarrow \|v+w\|^2 = \|w\|^2 + \|w\|^2}$$

TEOREMA di PITAGORA

OSSERVAZIONE 1)

La matrice associata al prodotto scalare espressa nella base orto-normale è sempre I.

OSSERVAZIONE 2)

Sia $B_{\perp n}$ una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \text{euclideo})$. $B_{\perp n} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Dato $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \Rightarrow v \cdot v_k = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) \cdot v_k = \sum_{j=1}^{n} x_j (v_j \cdot v_k) =$

(per $j \neq k$ il prodotto scalare è nullo) $= x_k (v_k \cdot v_k) = x_k$