11/10/2017

I° metodo per il calcolo dell'inversa di una matrice:

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo A invertibile

cioè $\exists A^{-1}$ tale che $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$

Supponiamo $\det A \neq 0 \Rightarrow$ per calcolare A^{-1} costruiamo per prima cosa la matrice A^* detta AGGIUNTA di A, le cui entrate sono i "COMPLEMENTI ALGEBRICI" delle entrate di A

Definizione:: Data $A(ij)_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$ $\Rightarrow$ é detto COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{ij} il numero $(-1)^{i+j}|A_{\hat{ij}}|$ dove $A_{\hat{ij}}$ é la sottomatrice di A ottenuta tagliando la i-esima riga e la j-esima colonna di A.

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{\operatorname{Det} A}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Costruiamo A^*

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

VERIFICHIAMO CHE $A \cdot A^{-1} = I$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ DELL'INVERSA:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2_a) $A \cdot B$ é invertibile se A e B lo sono; perché

$|A \cdot B| = |A|\,|B|$ se $|A| \neq 0$ e $|B| \neq 0 \Rightarrow |A \cdot B| \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, (AB)^{-1}$ e 2_b) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

DIMOSTRAZIONE DI 2_b)

Sappiamo che $(AB) \cdot (A \cdot B)^{-1} = I \Rightarrow A \cdot \underset{\downarrow}{\overset{\text{PER LA PROP. ASSOCIATIVA}}{}} B\,(A \cdot B)^{-1} = I$

$\Rightarrow$ moltiplico a sinistra per A^{-1} entrambi i membri:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot B\,(AB)^{-1} = A^{-1} \cdot I$$

$\Rightarrow I\,B\,(AB)^{-1} = A^{-1} \cdot I \quad \Rightarrow B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$ POICHÉ I

È L'ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO TRA MATRICI,

moltiplico a sinistra per $B^{-1} \Rightarrow \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{I}\,(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ TESI DIMOSTRATA c.v.d.

Sia e una operazione elementare riga su $A \in M_{p \times n}$,

cioè $e(A)$ é la matrice equivalente ad A determinata

da e $\Rightarrow$ si dimostra che $e(A) = e(I_{p \times p}) \cdot A$

OSSERVAZIONE $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow \underset{I_{2\times 2}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{A_{2\times 3}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} =$

$= \underset{A_{2\times 3}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \underset{I_{3\times 3}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

ESEMPIO:

DATA $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, SIA $e: \begin{matrix} R_2 \to R_1 \\ R_1 \to R_2 \end{matrix} \Rightarrow e(A) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$e\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{e(I)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e(A)$

VERIFICARE ANCHE LE ALTRE OPERAZIONI ELEMENTARI (FARE PER CASA)

PROPOSIZIONE $= e_n(e_{n-1}(e_{n-2}(\dots e_3(e_2(e_1(A)))\dots)))$

$$= \left(e_n(e_{n-1}(e_{n-2}(\dots e_3(e_2(e_1(I)))\dots)))\right)\cdot A$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE SU $n = \#$ OPERAZIONI ELEMENTARI

1) Verifico per $n=1$; vera per quanto detto sopra

2) Si suppone vera la proposizione fino a $n=k$ e la dimostriamo per $n=k+1$.

Devo dimostrare che $e_{k+1}(e_k(e_{k-1}(\dots e_2(e_1(A))\dots)))$

$$= \left(e_{k+1}(e_k(e_{k-1}(\dots e_2(e_1(I)))\dots)))\right)\cdot A$$

so che $e_k(e_{k-1}(\dots e_2(e_1(A)))\dots)) = e_k\left(e_{k-1}(e_{k-2}\dots e_2(e_1(I)))\right)\cdot A$

$$\Rightarrow e_{k+1}\left(e_k(e_{k-1}(\dots e_1(A)\dots))\right) = e_{k+1}\cdot\left(e_k(e_{k-1}(e_{k-2}\dots e_2(e_1(I))))\cdot A\right)$$

$$\boxed{\begin{matrix} e(A) = e(I)\cdot A \\ \parallel \\ e(IA) \end{matrix}}$$

$$= e_{k+1}(e_k(e_{k+1}(\dots e_3(e_2(I)\,e_1(I))\cdot A)$$

$$= e_{k+1}(e_k(e_{k-1}(\dots e_3(I)\,e_2(I)\,e_1(I)))\cdot A = \dots$$

$$= e_{k+1}(I)\,e_k(I)\,e_{k-1}(I)\dots e_3(I)\,e_2(I)\,e_1(I)\cdot A =$$

4

$$= e_{k+1}\left(e_k(I)\,e_{k-1}(I)\cdot e_{k-2}(I)\dots e_1(I)\right)\cdot A = e_{k+1}\left(e_k\left(e_{k-1}(I)\cdot e_{k-2}(I)\dots e_1(I)\right)\right)\cdot A$$

$= \dots = (e_{k+1}(e_k(e_{k-1} \dots e_3(e_2(I) \cdot e_1(I)) \cdot A =$

$= \left(e_{k+1}(e_k(e_{k-1} \dots e_3(e_2(e_1(I)))))\right) \cdot A$ c.v.d

(Faccio operazioni elementari sulle matrici che trovo nelle parentesi)

(QUINDI $|A| \neq 0$ E IL RANGO È n)

Sia $A \in M_{n \times n}$ invertibile $\Rightarrow$ dopo k operazioni elementari trovo come matrice ridotta a gradini in forma canonica, l'identità: cioè

$$e_k(e_{k-1}(e_{k-2}(\dots e_3(e_2(e_1(A)))\dots))) = I$$

$$\|$$

$$\left(e_k(e_{k-1}(e_{k-2}(\dots e_3(e_2(e_1(I)))\dots)))\right) \cdot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{e_k(e_{k-1}(\dots e_2(e_1(I)))) = A^{-1}}$$

FORMIAMO LA MATRICE $(A \vdots I)_{3 \times 6}$

ESEMPIO: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A_{3\times3} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 2R_2 + R_3 \to R_2 \\ \sim \\ R_1 - R_3 \to R_1 \end{matrix}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2R_1 + R_2 \to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} R_1/2 \to R_1 \\ \sim \; R_2/2 \to R_2 \\ R_3/2 \to R_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Sia $\Sigma \begin{cases} x+y-z=0 \\ -x-2y-z=0 \\ Kx-y-2z=0 \end{cases}$ $K \in \mathbb{R}$ Il sistema ha soluzione SEMPRE perché é omogeneo $\Rightarrow (0,0,0) \in Sol\,\Sigma$

Discutere il sistema al variare di k.

Sia A la matrice dei coefficienti $A \in M_{3\times3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix}$, PONIAMO $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times1}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

POSSIAMO RISCRIVERE IL SISTEMA IN FORMA MATRICIALE:

$\Sigma: AX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+y-z \\ -x-2y-z \\ kx-y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

CERCHIAMO IL RANGO DEL SISTEMA CHE COINCIDE CON IL RANGO DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI A:

$|A| = 3-(2+k)-(1+2k) = 0-3k = \underline{-3k}$

$|A| = 0$ per $k=0$

Per tutti i k diversi da 0, il determinante é $\neq 0$

$-3k=0$ $\underline{\text{per } k=0}$ $\underline{rg\,A=2}$ PERCHE NELLA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ C'É UN MINORE DI ORDINE 2, $\neq 0$.