14/11/17 LEZIONE GEOMETRIA

Ho un sottospazio $\mathcal{U}$ di uno spazio vettoriale V n-dimensionale, con $\dim \mathcal{U} = k$; $k \leq n$

Sia $B_{\mathcal{U}} = \{v_1 \dots v_k\} \Rightarrow$ qual è l'equazione di $\mathcal{U}$?

$$A = \begin{pmatrix} [v_1] & [v_2] & [v_3] & \dots & [v_k] \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}_{n \times k} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \text{NO}$$

NON SI POSSONO MOLTIPLICARE

$A^T_{k \times n} X_{n \times 1} = 0_{k \times 1}$ SI

È questo il ragionamento? CIOÈ OTTENIAMO L'EQUAZIONE DI $\mathcal{U}$

Esempio: $\mathcal{U} = \pi = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$, $rg \Sigma = 2$; $Sol \Sigma = \infty^{3-1} = \infty^1$ → RETTA

QUINDI NON VA BENE PERCHÉ $\mathcal{U}$ È UN PIANO!

$\Rightarrow$ RICORDANDO CHE OGNI VETTORE DI $\mathcal{U}$ È COMBINAZIONE LINEARE DEI GENERATORI

$\Rightarrow$ Prendo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ nell'esempio $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ $s, t \in \mathbb{R}$.

→ equazione vettoriale del piano.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ s \\ -t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = s + 2t \\ y = s \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow$ equazione parametrica del piano.

$x = y - 2z$ → equazione cartesiana del piano.

IN GENERALE:

$\mathcal{U} = \langle\langle v_1 \dots, v_k \rangle\rangle \Rightarrow$ preso $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X \in \mathcal{U} \Rightarrow X = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \dots s_k v_k$ → equazione vettoriale sottospazio $\forall s_j \in \mathbb{R}$ con $j = 1 \dots k$.

DATE

- $B_{\mathcal{U}} = \{u_1 \dots u_p\}$ e $B_W = \{w_1 \dots w_r\}$, Cerco $B_{\mathcal{U} \cap W}$, la base dell'intersezione.

$\Downarrow$ Trovo l'equazione di $\mathcal{U}$ — $\Downarrow$ Trovo l'equazione di W $\Rightarrow$ Trovo l'equazione di $\mathcal{U} \cap W$ mettendo a sistema le altre due.

$\Rightarrow$ passo dall'equazione ad una base. COME FATTO PRIMA.

- Sia $A_{p \times n} \in M_{p \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_p \end{pmatrix}$ $R_j \in \mathbb{R}^n$ $\forall j = 1, \dots, p$.

Posso considerare $\mathcal{U} = \langle\langle R_1, \dots R_p \rangle\rangle$ sottospazio (DI $\mathbb{R}^n$), $\dim \mathcal{U} = rg(A)$, perché $rg(A) =$ n° vett. riga linearmente indip.

Se prendo $A' \sim A$, cioè A' ottenuta con operazioni elementari riga dalla matrice A, definisco $\mathcal{U}' = \langle\langle R_1', R_2' \dots R_p' \rangle\rangle \{ \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{U}'$? cioè $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ e $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$. I VETTORI DI $\mathcal{U}'$ SONO OTTENUTI COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DI $\mathcal{U}$ E QUINDI STANNO IN $\mathcal{U}$ $\Rightarrow \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ E VICEVERSA $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$

ES! Se $R_1' = \alpha R_1 + \beta R_2 \Rightarrow R_1 = \frac{R_1' - \beta R_2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\mathcal{U} = \mathcal{U}'}$ perché R_1' è combinazione lineare di R_j e viceversa.

LE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA NON CAMBIANO LO SPAZIO RIGA DELLA MATRICE A

- Sia $A_{p \times n} \in M_{p \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = (C^1, C^2, \dots C^n)$ $C^j \in \mathbb{R}^p$ $\forall j = 1 \dots n$. COLONNE DI A.

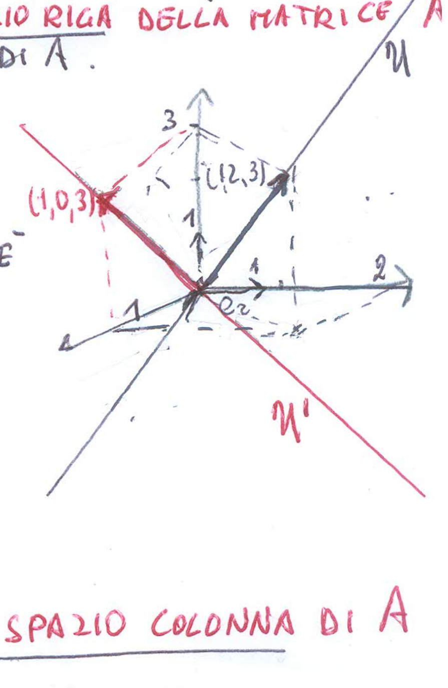
Posso considerare $\mathcal{U} = \langle\langle C^1, \dots, C^n \rangle\rangle \{ \mathbb{R}^p$.

Se prendo $A' \sim A \Rightarrow \mathcal{U}' = \langle\langle C_1', C_2' \dots C_n' \rangle\rangle \{ \mathbb{R}^p$. $\Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{U}'$?

Esempio: $\begin{array}{c} \begin{matrix} C^1 & C^2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \end{array} = A \Rightarrow \mathcal{U} = \langle\langle C^1, C^2 \rangle\rangle$ $\dim \mathcal{U} = 1 \Rightarrow \mathcal{U} = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \{ \mathbb{R}^3$ È UNA RETTA GENERATA DA $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Nel mio $\mathbb{R}^3$ ho fissato la base canonica con i tre vettori nel piano cartesiano.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \overset{2R_1 - R_2 \to R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = A' \Rightarrow \mathcal{U}' = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$



$\mathcal{U} \neq \mathcal{U}'$

LE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA CAMBIANO LO SPAZIO COLONNA DI A

Proposizione: le operazioni elementari riga compiute sulle righe di una matrice A non mutano la lineare indipendenza delle colonne,

Inoltre se la colonna C_j di una matrice A è data come combinazione lineare delle restanti colonne cioè $C_j = a_1C_1 + a_2C_2 + \dots a_{j-1}C_{j-1} + \dots a_{j+1}C_{j+1} + \dots a_nC_n \Rightarrow$ la colonna C_j' della matrice $A' \sim A$ è combinazione lineare delle rimanenti nel seguente modo: $C_j' = a_1C_1' + a_2C_2' + a_{j-1}C_{j-1}' + \dots a_{j+1}C_{j+1}' + \dots a_nC_n'$.

CIOÈ NON CAMBIANO I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE CHE ESPRIME C_j E C_j'

APPLICAZIONE: DATA UNA BASE DI UN SOTTOSPAZIO K-DIMENSIONALE U, DI UNO SPAZIO n-DIMENSIONALE V, CERCO UNA BASE DI V CHE CONTENGA QUELLA DI U; FORMO UNA MATRICE METTENDO IN COLONNA I VETTORI DELLA BASE DI U E I VETTORI DI UNA BASE DI V, AD ESEMPIO QUELLA CANONICA: LA MATRICE COSÌ FORMATA È $n \times (n+K)$ E HA RANGO n; LA RIDUCIAMO A GRADINI CON IL METODO DI GAUSS E INDIVIDUIAMO COSÌ LE COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI CHE SONO QUELLE DEI PIVOT. LA PROPOSIZIONE PRECEDENTE GARANTISCE CHE LE COLONNE DELLA MATRICE INIZIALE CHE OCCUPANO LE STESSE POSIZIONI DI QUELLE DEI PIVOT SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E QUINDI FORMANO LA BASE CERCATA.