(GEOMETRIA) Prof. Chiavacci

$\Sigma: AX = B$ con $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$, $X \in M_{n \times 1}$, $B \in M_{p \times 1}$

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n}$ prodotti cartesiani =

$= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n\}$

Voglio dare una struttura algebrica su $\mathbb{R}^n$, in generale la definisco su un insieme V generico.

Diamo 2 operazioni su V:

① LA SOMMA : $+$ $\quad V \times V \longrightarrow V$

$(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$

② MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE : $\cdot\lambda$ $\quad \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(\lambda, v) \longmapsto \lambda v$

Queste operazioni soddisfano varie proprietà

1) $(V, +)$ deve essere un GRUPPO ABELIANO:

2) ° l'operazione per $\cdot\lambda$. deve essere associativa $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

3) ° $\exists$ elemento neutro $\lambda = 1$ poiché $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

4) ° Deve valere la proprietà distributiva dell'operazione per λ rispetto alla somma $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e v_1 e $v_2 \in V$

In questo caso la struttura $(V, +, \cdot\lambda)$ è ~~detta~~ detta SPAZIO VETTORIALE sul campo $\mathbb{R}$

In particolare analizziamo $(\mathbb{R}^n, +, \cdot\lambda)$

Per la somma: prendo la coppia $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_1 = \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{n\text{-upla}} \text{ e } v_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

ESEMPIO in $\mathbb{R}^3$ $\quad v_1 = (1, 2, 3)$ e $v_2 = (-2, 8, \pi) \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 = (-1, 10, 3+\pi)$$

- Vale la proprietà commutativa $v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ poiché $x_j + y_j = y_j + x_j \quad \forall j = 1, \dots, n$ poiché tale proprietà è verificata per i numeri reali
- Vale la proprietà associativa $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$. Sono uguali perché $(x_j + y_j) + z_j = x_j + (y_j + z_j) \quad \forall j = 1, \dots, n$ poiché tale proprietà è verificata per i numeri reali
- C'è l'elemento neutro $v = (0, \dots, 0) = 0$ della somma
- $\exists$ l'opposto $\quad -v = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

$\quad \hookrightarrow$ È UN <u>GRUPPO ABELIANO</u>

Vediamo un'altra operazione su $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(\lambda, v) \longmapsto \lambda v$$

posto $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ si ha $\lambda = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

- VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA?

$$\lambda(\mu v) = (\lambda \mu) v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} ? \Rightarrow$$

$$\lambda(\mu x_1, \mu x_2, \dots, \mu x_n) = (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \dots, \lambda(\mu x_3))$$

$$(\lambda \mu) v = ((\lambda \mu) x_1, (\lambda \mu) x_2, \dots, (\lambda \mu) x_n)$$

$\lambda(\mu x_j) = \mu \lambda x_j \quad \forall j = 1, \dots, n$

quindi tale proprietà è verificata essendolo per i numeri reali

- VALE LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA?

Si dimostri che $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in V$

Posto $v_1 = (x_1, \dots, x_n)$ e $v_2 = (y_1, \dots, y_n)$

$$\lambda(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n) = (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \dots, \lambda(x_n + y_n))$$

$$\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_n) =$$

$$= (\lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda x_2 + \lambda y_2, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n)$$

Le due n-uple coincidono perché $\forall j = 1, \dots, n \quad \lambda(x_j + y_j) = \lambda x_j + y_j$ in quanto in $\mathbb{R}$ la moltiplicazione gode della prop. DISTRIBUTIVA rispetto alla somma

Quindi $\mathbb{R}^n$ È UNO <u>SPAZIO VETTORIALE</u>

■ ESEMPI di SPAZI VETTORIALI

1. $(M_{p \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot \lambda) \quad \forall p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$

2. $C^0_{[a,b]} = \{ f \; [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua} \}$

DEFINISCO $+ : C^0_{[a,b]} \times C^0_{[a,b]} \longrightarrow C^0_{[a,b]}$

$$(f, g) \longmapsto f + g$$

Date due funzioni $f, g \; A \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f+g \; A \longrightarrow \mathbb{R}$ è così definita $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A$

Quindi la somma in $C^0_{[a,b]}$ è un GRUPPO ABELIANO perché:

1) Soddisfa la proprietà associativa:

$\forall x \in A \quad \big(f(x) + g(x)\big) + h(x) = f(x) + \big(g(x) + h(x)\big)$

2). $\exists$ elemento neutro: $f \equiv 0$ $\Rightarrow$ Costante quindi sempre continua

3). Data $f \in \mathcal{C}^0_{[a,b]} \Rightarrow \exists\, g \mid f + g \equiv 0$

$g = -f$

4). Vale la proprietà commutativa

$\cdot\lambda : \mathbb{R} \times \mathcal{C}^0_{[a,b]} \longrightarrow \mathcal{C}^0_{[a,b]}$

$(\lambda, f) \longmapsto \lambda f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \lambda(f(x))$

↳ Anche in questo caso valgono le proprietà richieste a $\cdot\lambda$

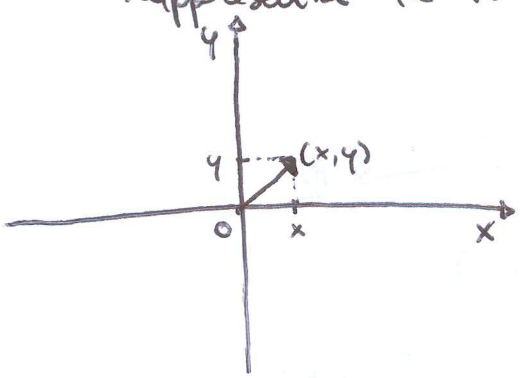
- I vettori di questo spazio vettoriale sono le funzioni continue.

$\mathbb{R}^0 = \{0\}$ è UNO SPAZIO VETTORIALE

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ è UNO SPAZIO VETTORIALE "su se stesso"

■ In $\mathbb{R}^2$ voglio rappresentare geometricamente gli elementi di $\mathbb{R}^2$ visto come spazio vettoriale

$v \in \mathbb{R}^2$ è del tipo $v = (x, y) \Rightarrow$ penso in $\mathbb{R}^2$ un punto che rappresenta il vettore nullo $\vec{0}$

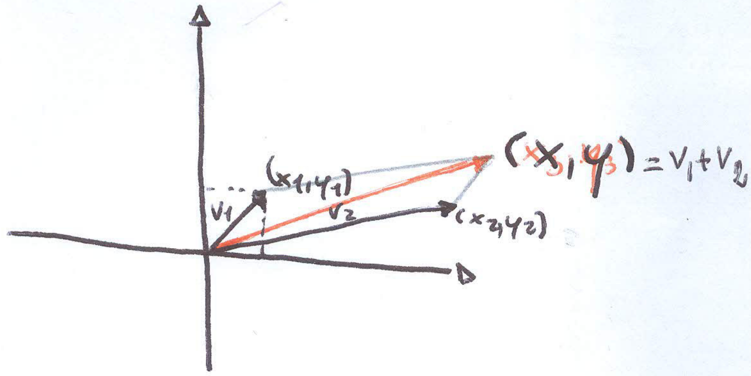


- $\exists$ una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano $\mathbb{R}^2$ e i vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ rappresentata in questo modo: si considera un segmento orientato avente come estremo iniziale $O(0;0)$ ed estremo finale il punto di coordinate $(x;y)$

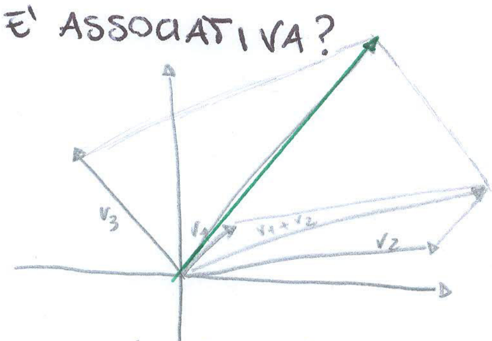
2) Tale segmento orientato è detto VETTORE GEOMETRICO

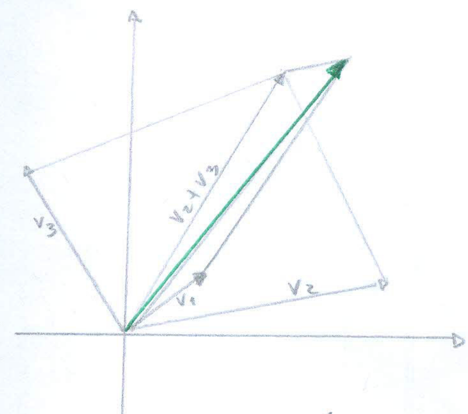
• Considero l'insieme V dei vettori geometrici in $\mathbb{R}^2$: definisco un'operazione di somma $V \times V \longrightarrow V$

$(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$



• E' ASSOCIATIVA?

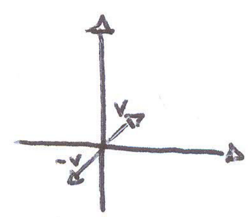




la $(v_1+v_2)+v_3$ è graficamente uguale a $v_1(v_2+v_3)$

• ELEMENTO NEUTRO: vettore nullo

• ELEMENTO OPPOSTO di v, $-v$

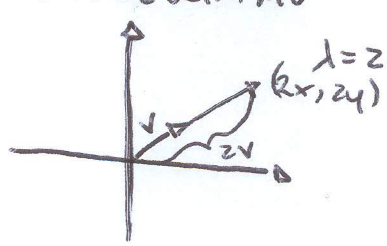


• VALE LA PROPRIETA' COMMUTATIVA

E' QUINDI UN GRUPPO ABELIANO

• $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(\lambda, v) \longmapsto \lambda v$



L'insieme V dei vettori geometrici è uno SPAZIO VETTORIALE