Teorema di ortogonalizzazione: Dati $v_1, \dots, v_k$ vettori in uno spazio euclideo n-dimensionale, linearmente indipendenti ($\Rightarrow k \leq n$), chiamiamo $L_j = \langle\langle v_1, \dots, v_j \rangle\rangle$ $\forall j = 1, \dots, k$ e si ha $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_k \Rightarrow \exists\, k$ vettori $w_1, \dots, w_k$ ortogonali tra loro tali che se $L'_j = \langle\langle w_1, \dots, w_j \rangle\rangle$ si ha $L'_j = L_j$ $\forall j = 1, \dots, k$

Inoltre se $z_1, \dots, z_k$ sono vettori che soddisfano quanto richiesto precendentemente $\Rightarrow z_j = \alpha_j w_j$ con $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\forall j = 1, \dots, k$.

Dimostrazione per induzione su k:

1° passo: $k = 1$, basta prendere $w_1 = v_1$

2° passo: supponiamo la proposizione verificata fino ad un numero k di vettori e dimostriamolo per $k+1$ vettori

Considero il vettore v_{k+1} e lo decompongo nella somma di due vettori g_k ed h_k con $g_k \in L_k$ e ~~tali che sia~~ $h_k \in L_k^{\perp} \Rightarrow v_{k+1} = g_k + h_k \Rightarrow$ è sufficiente prendere $w_{k+1} = h_k \Rightarrow$

$w_1, \dots, w_k, w_{k+1}$ sono ortogonali, in quanto

$w_1, \dots, w_k \in L'_k$, mentre $w_{k+1} \in L'^{\perp}_k$.

Inoltre abbiamo la $\dim L'_{k+1} = \dim L_{k+1}$, dove

$L_{k+1} = \langle\langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle\rangle$, e $L'_{k+1} = \langle\langle w_1, \dots, w_{k+1} \rangle\rangle$

dimostriamo che $L_{k+1} \subseteq L'_{k+1}$. So già che

$v_1, \dots, v_k \in L'_{k+1}$ (per ipotesi) devo dimostrarlo

per v_{k+1}, ma $v_{k+1} = g_k + w_{k+1}$, con $g_k \in L'_{k+1}$
e $w_{k+1} \in L'_{k+1}$ $\Rightarrow$ la loro perché $L'_k \subseteq L'_{k+1}$
somma che è $v_{k+1} \in L'_{k+1}$.

Dimostro che $L'_{k+1} \subseteq L_{k+1}$ cioè dimostro che

$w_1, \dots, w_{k+1} \in L_{k+1}$, so già che $w_1, \dots, w_k \in L_{k+1}$ poiché

$w_1, \dots, w_k \in L'_k = L_k \subset L_{k+1}$. Quindi devo dimostrare

che $w_{k+1} \in L_{k+1}$. Sappiamo che $w_{k+1} = v_{k+1} - g_k$,

so che $v_{k+1} \in L_{k+1}$ e $g_k \in L'_k = L_k \subset L_{k+1}$.

La loro somma $w_{k+1} \in L_{k+1}$.

La seconda richiesta è di ovvia dimostrazione

c.v.d.

Esempio di applicazione del teorema di ortogonalizzazione per determinare una base ortogonale di un sottospazio dato

In $\mathbb{R}^3$ sia data la base $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$: applichiamo il teorema appena dimostrato

poniamo $\boxed{w_1} = v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$v_2 = \alpha w_1 + w_2$ con $w_2 \in \langle\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle\rangle^{\perp} \Rightarrow$

$w_2 = v_2 - \alpha w_1 \Rightarrow w_2 \cdot w_1 = (v_2 - \alpha w_1) \cdot w_1 = 0$

$v_2 \cdot w_1 = \alpha w_1 \cdot w_1 \Rightarrow \alpha = 1$

$\boxed{w_2} = v_2 - w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Cerco w_3; $v_3 = g_2 + w_3$, con $g_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$

quindi $v_3 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + w_3$ con $w_3 = \langle\langle (w_1, w_2)^{\perp} \rangle\rangle$.

$w_3 = v_3 - \beta_1 w_1 - \beta_2 w_2$. faccio il prodotto scalare di w_3 con w_1 e w_2 e trovo un sistema

$$\begin{cases} \overset{0}{\overbrace{w_3 \cdot w_1}} = v_3 \cdot w_1 - \beta_1 w_1 \cdot w_1 - \beta_2 \cancel{w_2 \cdot w_1} \\ w_3 \cdot w_2 = v_3 \cdot w_2 - \beta_1 \cancel{w_1 \cdot w_2} - \beta_2 w_2 \cdot w_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_3 \cdot w_1 = \beta_1 w_1 \cdot w_1 \\ v_3 \cdot w_2 = \beta_2 w_2 \cdot w_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \dfrac{v_3 \cdot w_1}{\|w_1\|^2} = \dfrac{1}{2} \\ \beta_2 = \dfrac{v_3 \cdot w_2}{\|w_2\|^2} = 1 \end{cases}$$

$\boxed{w_3} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\0\\-3/2\end{pmatrix}$. controllo i VETTORI: SONO ORTOGONALI! il metodo funziona!

Dati i vettori $v_1, \dots, v_K$ in uno spazio euclideo n-dimensionale, posso determinare la matrice quadrata $K \times K$.

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_1 \cdot v_K \\ \vdots & & \vdots \\ v_K \cdot v_1 & \dots & v_K \cdot v_K \end{pmatrix}$$

Abbiamo già visto tale matrice nel caso in cui i vettori sono linearmente indipendenti e quindi la matrice è $[(\cdot)|_{\langle\langle v_1, \dots, v_K \rangle\rangle}]_V$ prodotto scalare

In generale questa matrice si chiama matrice di Gram (M_G) ed il suo determinante è detto Gramiano dei vettori $v_1, \dots, v_K = G(v_1, \dots, v_K)$

Se i vettori sono linearmente indipendenti $\Rightarrow G(v_1, \dots, v_K) > 0$

Se i K vettori sono linearmente dipendenti $\Rightarrow G(v_1, \dots, v_K) = 0$

Dimostriamolo per $K=2$ (vale anche per $K>2$, ma bisogna ampliarlo)

$$v_1, \alpha v_1 \Rightarrow M_G = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot \alpha v_1 \\ \alpha v_1 \cdot v_1 & \alpha v_1 \cdot \alpha v_1 \end{pmatrix} =$$

$$M_G = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & \alpha(v_1 \cdot v_1) \\ \alpha(v_1 \cdot v_1) & \alpha^2(v_1 \cdot v_1) \end{pmatrix}$$

$$M_G = v_1 \cdot v_1 \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_G| = G(v_1, \alpha v_1) =$$

$$= v_1 \cdot v_1 \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Possiamo rifare l'analogo procedimento per $K>2$. (prendiamo un vettore che è combinazione lineare degli altri ... e così via)

cvd.

Dati i vettori $v_1, \dots, v_K$ possiamo dare i vettori $w_1, \dots, w_K$ ortogonali tramite il teorema di ortogonalizzazione.

Si dimostra che tramite operazioni elementari riga e colonna (analoghe a quelle righe ma sulle colonne) la matrice $M_G = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & \cdots & v_1 \cdot v_K \\ \vdots & & \vdots \\ v_K \cdot v_1 & \cdots & v_K \cdot v_K \end{pmatrix}$ risulta equivalente alla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_k \cdot w_k \end{pmatrix}.$$

Lo vediamo per $k=2$ (come prima, con ragionamenti analoghi si può fare per $k>2$)

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}. \quad \begin{matrix} w_1 = v_1 \\ v_2 = \alpha w_1 + w_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 (w_2 + \alpha w_1) \\ (\alpha w_1 + w_2) \cdot w_1 & (\alpha w_1 + w_2)(\alpha w_1 + w_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & \alpha w_1 \cdot w_1 + w_1 \cdot w_2 \\ \alpha w_1 \cdot w_1 + w_2 \cdot w_1 & \alpha^2 w_1 \cdot w_1 + \alpha \underbrace{w_1 \cdot w_2}_{0} + \alpha \underbrace{w_2 \cdot w_1}_{0} + w_2 \cdot w_2 \end{pmatrix} =$$

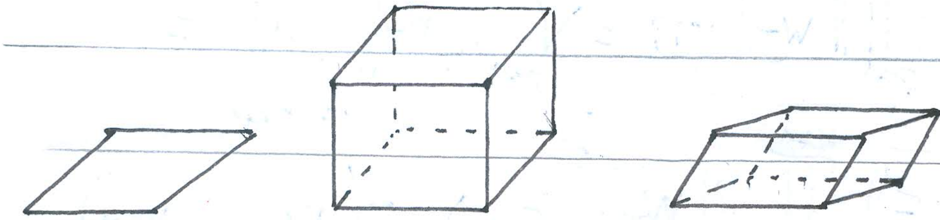
$$= \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & \alpha w_1 \cdot w_1 \\ \alpha w_1 \cdot w_1 & \alpha^2 w_1 \cdot w_1 + w_2 \cdot w_2 \end{pmatrix} \sim$$ applico operazioni determinantali

$$-\alpha R_1 + R_2 \to R_2 \quad \sim \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & \alpha w_1 \cdot w_1 \\ 0 & w_2 \cdot w_2 \end{pmatrix} \sim$$

$$-\alpha C^1 + C^2 \to C^2 \quad \sim \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \cdot w_2 \end{pmatrix}$$

Così facendo so che $G(v_1, v_2) = \|w_1\|^2 \cdot \|w_2\|^2 \leq \|v_1\|^2 \|v_2\|^2$

In generale $G(v_1, \dots, v_k) = \prod_{j=1}^{k} \|w_j\|^2$



Proposizione: Siano $v_1, \dots, v_k \in (\mathbb{R}^n, \text{euclideo})$ se consideriamo tali vettori come lati di un parallelepipedo P in $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow Vol(P) = \sqrt{G(v_1, \dots, v_k)}$

Dimostrazione per induzione su K:

per $K=1$ $\quad P = \overline{OA}$, $Vol(P) = \|v\|$

$\sqrt{G(v)} = \sqrt{v \cdot v} = \|v\|$ ✓

La poniamo VERO fino a k e lo dimostriamo per $K+1$ vettori. Il $Vol(P$ definito da vettori $v_1, \dots, v_{k+1}) =$

$= Vol(P$ definito dai vettori $v_1, \dots, v_k) \cdot \|h\|$,

dove h è dato da $v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} a_j v_j$. (ALTEZZA DI P)

per ipotesi induttiva $Vol(P$ definito da $v_1, \dots, v_k) =$

$= \sqrt{G(v_1, \dots, v_k)} \Rightarrow Vol(P$ definito da $v_1, \dots, v_{k+1}) =$

$= \sqrt{G(v_1, \dots, v_k)} \cdot \|h\|$

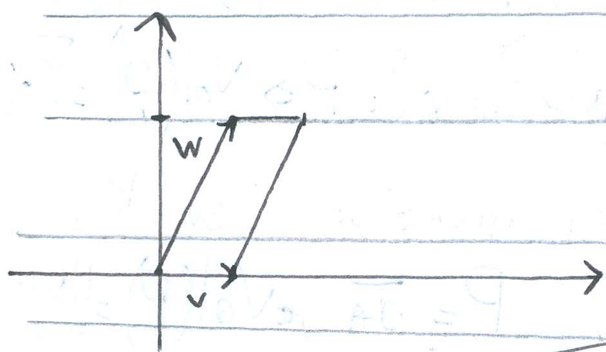
$$= \sqrt{\prod_{j=1}^{k} \|w_j\|^2 \cdot \|h\|} = \sqrt{\prod_{j=1}^{k} \|w_j\|^2 \, \|h\|^2} =$$

$h = w_{k+1}$

$$= \sqrt{\prod_{j=1}^{k+1} \|w_j\|^2} = \sqrt{G(v_1, \dots, v_{k+1})}$$

c.v.d.

esempio: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\text{Area} = \sqrt{G(v,w)} = \sqrt{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \sqrt{4} = 2$$