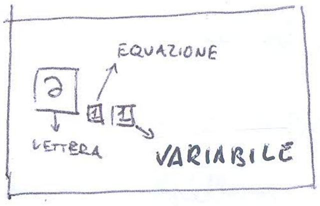
Sistemi lineari: un sistema lineare di K equazioni in n incognite a coefficienti in $\mathbb{R}$ (presi in un campo, in questo caso il campo dei numeri reali). La variabile compare al massimo con il grado 1. n e K sono numeri naturali ($\mathbb{N}$).
Le lettere vengono utilizzate per descrivere casi generici, negli esercizi assumono dei valori.



es. 1 (scrittura per esteso)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{K1}x_1 + a_{K2}x_2 + a_{K3}x_3 + \dots + a_{Kn}x_n = b_K \end{cases}$$

CERCHIAMO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE
Il primo interrogativo è: "si può risolvere?" In seguito si cercano i metodi di risoluzione. La possibilità di risoluzione di un sistema LINEARE è definita dal teorema di ROUCHÉ-CAPELLI CHE VEDREMO POI

Metodi di risoluzione:

- sostituzione (per sistemi brevi)
- somma e sottrazione
- Cramer (solo per determinati sistemi) $\rightarrow$ matrici e determinanti

ANALIZZIAMO ORA IL
Metodo di eliminazione di Gauss

Considerando un sistema ordinato (es. 1) SUPPONIAMO CHE NELLA PRIMA EQUAZ. CI SIA LA VARIABILE x_1 => lo scopo è eliminare TALE variabile dalla seconda eq. in poi, rendendo i coeff. di x_1 NULLI.

DEFINISCO "scalari" gli elementi del campo in cui si sta lavorando, in questo caso i numeri in $\mathbb{R}$.

CAMBIEREMO LE EQUAZIONI DEL SISTEMA PER OTTENERE EQUAZIONI IN CUI NON COMPARE PIÙ LA VARIABILE x_1: VEDIAMO COME CON UN ESEMPIO:

Andrea P. Zurlo

es. 2

$$\Sigma_1: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

perché sia un sistema omogeneo → tutti i termini noti dovrebbero essere nulli

è sistema lineare non omogeneo: ALCUNE eq. SONO NON omogenee (eq. omogenea: tutti i monomi hanno lo stesso grado)

"sistema lineare non omogeneo di tre eq. in tre incognite"

Voglio eliminare la variabile x_1 dalla 2ª equazione → metodo di el. di Gauss: Si moltiplicano ~~due~~ le due equazioni che si vogliono sommare per due scalari appropriati. Ad esempio moltiplicando per 3 la prima e per 2 la seconda. OTTENIAMO:

$$\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 3 \\ -6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

→ SOMMO MEMBRO A MEMBRO LE PRIME 2 EQUAZIONI E SOMMO I TERMINI SIMILI:

$\cancel{6x_1} - \cancel{6x_1} + 9x_2 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_3 = 3 + 0$

OTTENGO:

$7x_2 - x_3 = 3$

~~es. ex~~

La nuova eq. viene sostituita al posto della seconda nel sistema iniziale. ⇒

$$\Sigma_2: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Deve sorgere il dubbio se il nuovo sistema darà ~~una~~ la stessa soluzione del sistema iniziale a partire dal fatto che esso è cambiato. ~~la Rex~~ Risolvere il sistema significa trovare una n-upla ~~che se~~ di ~~se~~ numeri che sostituiti ai valori delle incognite ~~dica~~ renda ogni equ. un'identità.

DEVO DIMOSTRARE che la soluzione (DEL SISTEMA OTTENUTO DETTO Σ_2) sia identica a quella del sistema iniziale CHIAMATO Σ_1.

GEOMETRIA prof. Chiaracci 19.9.17

(2)

Sia $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ una soluzione di Σ_1 (sistema iniziale) $\Rightarrow$

$2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 - 1 = 0$ E

$-3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ È SOLUZIONE ANCHE DI Σ_2? CIOÈ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ SOSTITUITA IN $7x_2 - x_3 - 3 = 0$ LA RENDE NULLA: $7\alpha_2 - \alpha_3 - 3 = 0$?

Le soluzioni sono identiche perché ~~sostituendo la terna nella~~ la seconda eq. di Σ_2 è stata ottenuta a partire dalle prime due di Σ_1 ~~[illegible]~~, in cui la sostituzione della terna (DATA) porta a delle identità NULLE $\Rightarrow$ ANCHE LA LORO SOMMA È NULLA!

PROPOSIZIONE:
Moltiplicare per uno scalare un'eq., cambia l'eq. ma non la sua soluzione. Dimostrazione:

Sia $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ soluzione di un sistema lineare Σ $\Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è soluzione di ogni eq.

Considero la j-esima equazione Eq_j, $j = 1, \dots, k$

$\Rightarrow Eq_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$ $\Rightarrow$ se considero uno scalare β e moltiplico per β la j-esima eq. OTTENGO βEq_j

$\Rightarrow \beta \cdot Eq_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$? sì (ovvio) POICHÉ

$\beta Eq_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta(Eq_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \beta \cdot 0 = 0$ c.v.d.

TORNIAMO AL SISTEMA Σ_2 DELL'ESEMPIO: VOGLIAMO ELIMINARE x_1 DALLA 3ª EQAZ.

$$\Sigma_2: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$$

SOMMIAMO LA 1ª E LA 3ª EQUAZIONE:
$\rightarrow \cancel{2x_1} - \cancel{2x_1} + 3x_2 - 4x_2 - x_3 + 2x_3 = 1 - 6$
OTTENIAMO:
$-x_2 + x_3 = -5$

SOSTITUIAMO TALE EQUAZIONE ALLA TERZA EQUAZIONE DI Σ_2 E OTTENIAMO

$$\Sigma_3: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 7x_2 - x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = -5 \end{matrix}} \end{cases}$$

ORA Ripeto il procedimento considerando il sistema con le $\overbrace{k-1 \text{ eq.}}^{\text{ULTIME EQUAZIONI}}$ CON $n-1$ incognite $x_2, \dots, x_n$: NEL CASO DELL'ESEMPIO

IL SISTEMA DI 2 EQUAZIONI E 2 INCOGNITE $\begin{cases} 7x_2 - x_3 - 3 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5 = 0 \end{cases}$

SOMMO LA I EQUAZIONE CON LA II EQUAZ. MOLTIPLICATA PER 7.

Andrea P. Zurlo

OTTENGO $6x_3 = -32$ E LA SOSTITUISCO ALLA TERZA DI Σ_3, OTTENENDO

$$\Sigma_4: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_2 - x_3 = 3 \\ 6x_3 = -32 \end{cases}$$

IL SISTEMA Σ_4 COSÌ OTTENUTO È DETTO "RIDOTTO A GRADINI"

DEFINIZIONE: I primi coeff. non nulli di ogni EQUAZ. di un sistema "ridotto a gradini" prendono il nome di PIVÓT. Il numero (#) di pivót in un sistema a gradini si dice RANGO. DEL SISTEMA

IL SISTEMA DELL'ESEMPIO Σ_1 HA QUINDI RANGO 3