PROPOSIZIONE Dato $T: V \longrightarrow V$
Autovettori $v_1, \dots, v_k$ che corrispondono ad autovalori diversi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, con $\lambda_j \neq \lambda_i \ \forall i, j$, sono linearmente indipendenti

DIM: per induzione su k:
per $k=1$ vero
supponiamo vero fino a $k-1$ e dimostriamolo per k
pongo $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ ① $\Rightarrow$

$\Rightarrow T(0) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_k T(v_k) =$

$= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$

Moltiplico ① per $\lambda_k \Rightarrow \alpha_1 \lambda_k v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$

Sottraggo membro a membro $\Rightarrow 0 = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1}$

$\Rightarrow$ essendo $v_1, \dots, v_{k-1}$ l. indip. per ipotesi induttiva

$\Rightarrow \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k) = \dots = \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$

essendo $\lambda_j - \lambda_k \neq 0 \ \forall j \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, k-1$

$\Rightarrow$ in ① sostituendo rimane $\lambda_k v_k = 0$ ma $v_k \neq 0 \Rightarrow \lambda_k = 0$
cvd

Gli autovalori di un operatore $T: V \longrightarrow V$ sono dunque le radici (caratteristiche) del polinomio caratteristico associato ad una qualunque matrice $[T]_B$ in una base qualunque B di V.
Per la regola di Ruffini λ_0 è radice di $p_A(\lambda) \Rightarrow$ $(\lambda - \lambda_0)$ divide $p_A(\lambda)$ cioè $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m q_A(\lambda), m \in \mathbb{N}$ e $q_A(\lambda)$ polinomio non più divisibile per $\lambda - \lambda_0$
Il numero "m" è detto **MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA** della radice λ_0 cioè $m = \mu(\lambda_0)$
la dimensione di E_{λ_0} è detta **MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA** di λ_0

L'autospazio di un operatore ha sempre dimensione ≥ 1 e si dimostra che $\dim E_{\lambda_0} \leq \mu(\lambda_0)$

PROPOSIZIONE: Dati gli autospazi E_{λ_1} ed $E_{\lambda_2} \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

DEFINIZIONE: Una matrice quadrata A si dice DIAGONALIZZABILE se è simile ad una matrice diagonale D, cioè se $\exists$ una matrice S invertibile t.c. $D = S^{-1}AS$

DEFINIZIONE: Un operatore $T: V \longrightarrow V$ è DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow$ una qualunque matrice associata a T in una base qualunque $\mathcal{B}$ è diagonalizzabile.

PROPOSIZIONE: $T: V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\exists$ una base $\tilde{\mathcal{B}}$ di V formata da autovettori

DIM: "$\Rightarrow$" Se T è diagonalizzabile $\Rightarrow$ $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di V rispetto alla quale $[T]_{\mathcal{B}}$ è diagonale

$$\Rightarrow [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Se } \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$\Rightarrow T(v_j) = a_{jj} v_j \quad \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow v_j$ è autovettore $\forall j$

E viceversa

c.v.d.

Proposizione: $T: V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\exists\ \lambda_1 \dots \lambda_q$ autovalori tali che $\sum_{j=1}^{q} \dim E(\lambda_j) = n$

o equivalentemente $V = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q)$

DIM: "$\Rightarrow$" Se T è diagonalizzabile $\Rightarrow$ $\exists$ base di autovettori. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ autovettori e siano $v_1, \dots, v_r$ autovettori relativi allo stesso autovalore λ_1 e così via. Indichiamo con E_j il sottospazio generato dai vettori di base aventi lo stesso autovalore λ_j, $j = 1, \dots, q$

$\Rightarrow E_j \subset E(\lambda_j)$ e quindi avremo

$V = E_1 + E_2 + \dots + E_q \subset E(\lambda_1) + \dots + E(\lambda_q) =$ per (*)

$= E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q)$

"$\Leftarrow$" se $n = \sum \dim E(\lambda_j) \Rightarrow V = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q)$

$\Rightarrow$ fissiamo una base $\forall$ sottospazio $E(\lambda_j)$, uniamo le basi e troviamo così una base di V costituita da autov.

$\blacksquare$

PROPOSIZIONE: Sia $T: V \longrightarrow V$ operatore $\Rightarrow$
T è diagonalizzabile se e solo se $p(\lambda)$ ha tutte le radici nel campo e $\dim E(\lambda_j) = \mu(\lambda_j)$ $\forall j = 1, \dots, q$

DIM: "$\Leftarrow\Rightarrow$" So T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} \dim E(\lambda_j) = n \Rightarrow$
essendo $\dim E(\lambda_j) \leq \mu(\lambda_j)$ $\forall j = 1, \dots, q \Rightarrow \sum \dim E(\lambda_j) \leq$
$\leq \sum_{j=1}^{q} \mu(\lambda_j) \leq n$ Pertanto $\sum_{j=1}^{q} \dim E(\lambda_j) = n \Leftrightarrow$
$\sum_{j=1}^{q} \mu(\lambda_j) = n \Leftrightarrow \dim E(\lambda_j) = \mu(\lambda_j)$ $\forall j$
e $p(x)$ ha tutte le radici nel campo. □

COROLLARIO Sia $T: V \longrightarrow V$ se T ha n autovalori distinti nel campo $\Rightarrow$ T è diagonalizzabile

DIM. Poiché $\mu(\lambda_j) = 1$ $\forall j = 1, \dots, q \Rightarrow \dim E(\lambda_j)$ deve essere ≤ 1, ma sappiamo anche che $\dim E(\lambda_j) \geq 1 \Rightarrow \dim E(\lambda_j) = \mu(\lambda_j)$ $\forall j$. □

Esempio: 1) Dire se T è diagonalizzabile $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$e_1 \longmapsto e_1 + e_2$
$e_2 \longmapsto 3e_1 - e_2$
2) dare una base di autovettori

1) $[T]_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |T - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) - 3$

$= -1 + \lambda^2 - 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$

È diagonalizzabile e $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

-

Cerco gli autospazi: $E(2) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ retta

$\Rightarrow -x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_2 \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$E(-2) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$

La base cercata è $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

perciò $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$S^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \end{array}\right)$

□

Applicazione: Calcolo delle potenze n-esime di una matrice A

Sia $A \in M_{n \times n} \Rightarrow A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ volte}}$

Se $A = D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & a_n^k \end{pmatrix}$

(si dimostra per induzione su k)

Sia ora A diagonalizzabile $\Rightarrow \exists\, S$ invertibile tale che $D = S^{-1}AS$ (con S matrice formata con gli autovettori di base) $\Rightarrow$

$D^n = (S^{-1}AS)^n = (S^{-1}AS)(S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\cdots(S^{-1}AS) =$

$= S^{-1}ASS^{-1}ASS^{-1}AS \cdots S^{-1}AS = S^{-1}AIAIA \cdots IAS =$

$= S^{-1}A^nS \Rightarrow A^n = SDS^{-1}$

Il calcolo degli autovettori di operatori ha permesso di analizzare una grande quantità di problemi

I suoni di una corda di uno strumento musicale sono sovrapposizione di suoni con precisi valori di frequenza; si è scoperto che queste frequenze sono legate agli autovalori di un opportuno operatore simmetrico (che dipende dalla lunghezza e dalla tensione della corda) e che i corrispondenti autovettori sono le armoniche della oscillazione della corda
Un'analisi del genere vale per qualunque strumento musicale: le frequenze sono legate agli autovalori e la forma delle oscillazioni dipende dagli autovettori di un operatore opportuno

Altro esempio importante è quello dei livelli energetici degli elettroni degli atomi, autovalori di un opportuno operatore, mentre le forme delle funzioni d'onda corrispondenti a questi livelli (orbitali) è un autospazio

Praticamente quasi tutte le principali quantità della fisica atomica e subatomica sono descrivibili come autovettori: la meccanica quantistica è stata anche chiamata "meccanica delle matrici"