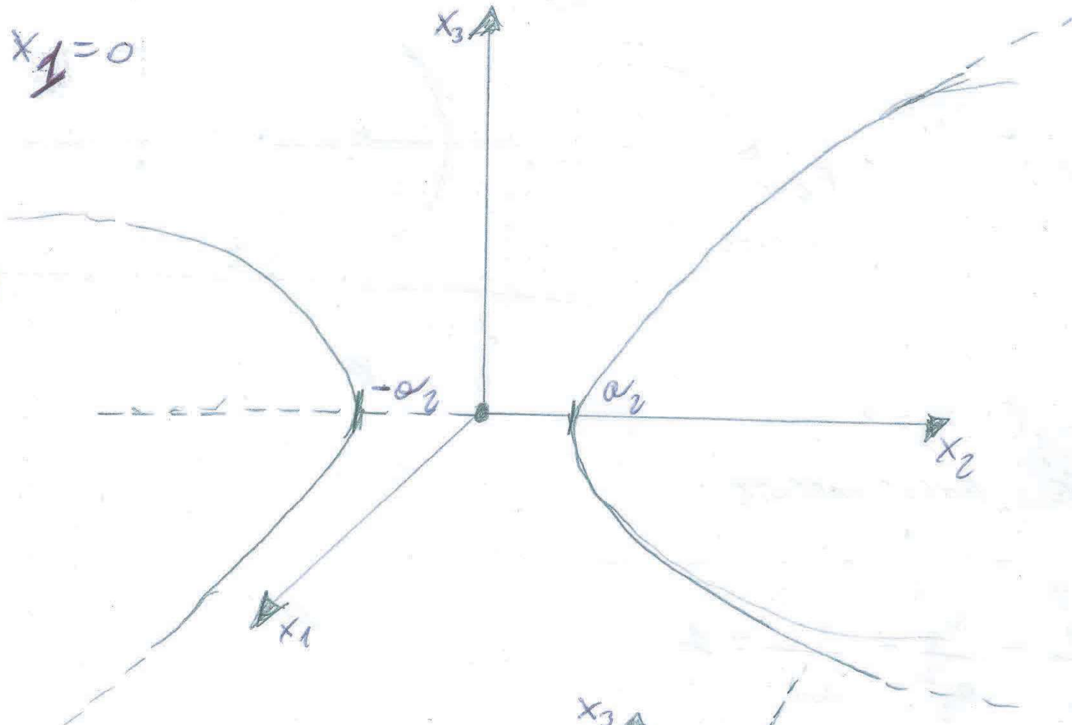
SEGNATURE ASSOCIATE ALLE QUADRICHE: IN $\mathbb{R}^3$

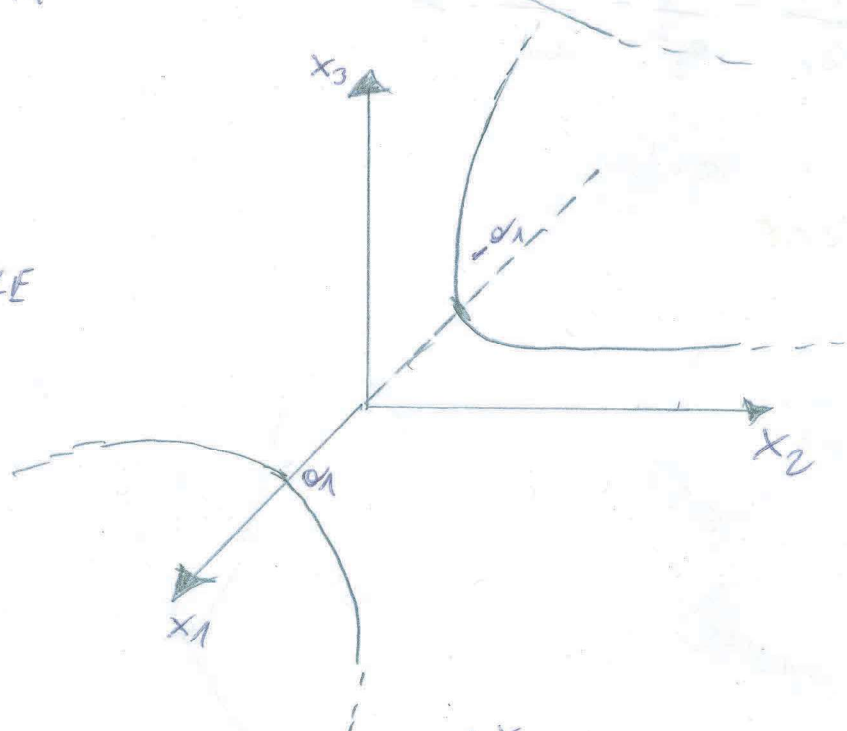
23/05/2018

$(2,1)$: $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}-\dfrac{x_3^2}{a_3^2}=1 \\ x_1=0 \end{cases} \rightarrow \dfrac{x_2^2}{a_2^2}-\dfrac{x_3^2}{a_3^2}=1$ IPERBOLE ✓

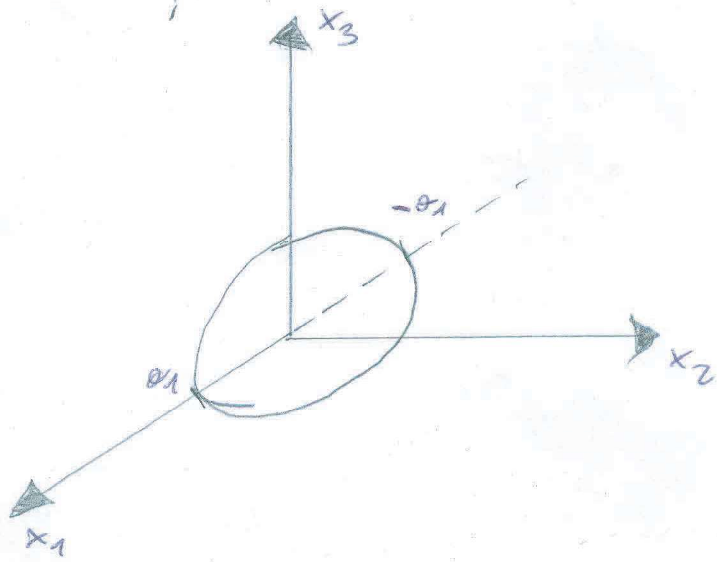
IPERBOLOIDE A UNA FALDA



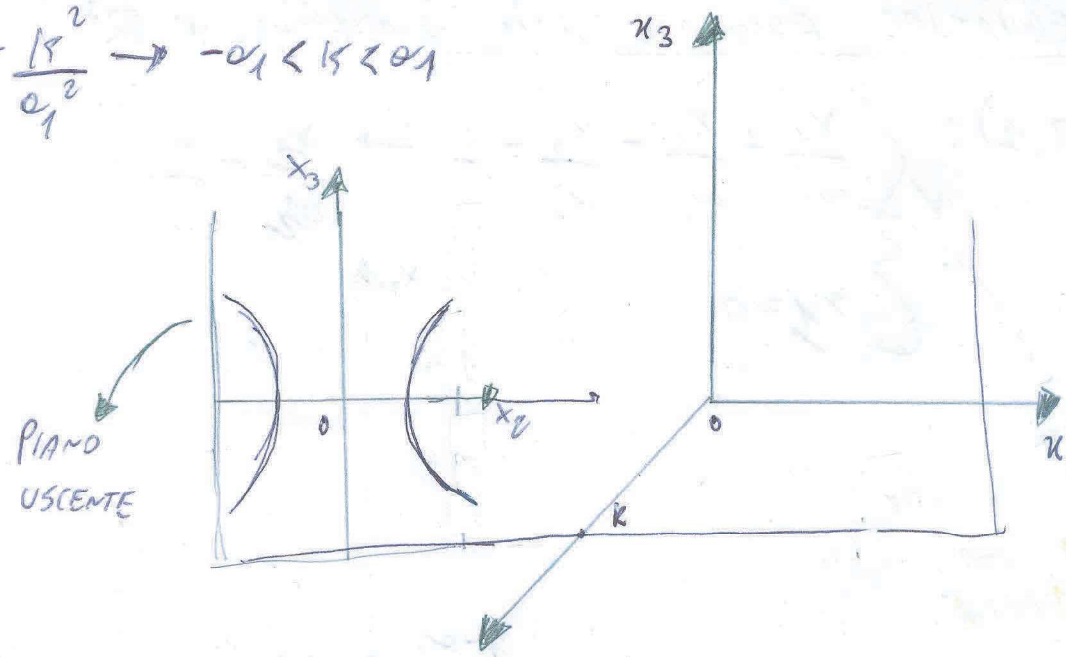
✓ $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a_1^2}-\dfrac{x_3^2}{a_3^2}=1 \\ x_2=0 \end{cases}$ IPERBOLE



✓ $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}=1 \\ x_3=0 \end{cases}$ ELLISSE



$$\begin{cases} \dfrac{x_2^2}{a_2^2} - \dfrac{x_3^2}{a_3^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a_1^2} \longrightarrow -a_1 < k < a_1 \\ x_1 = k \end{cases}$$

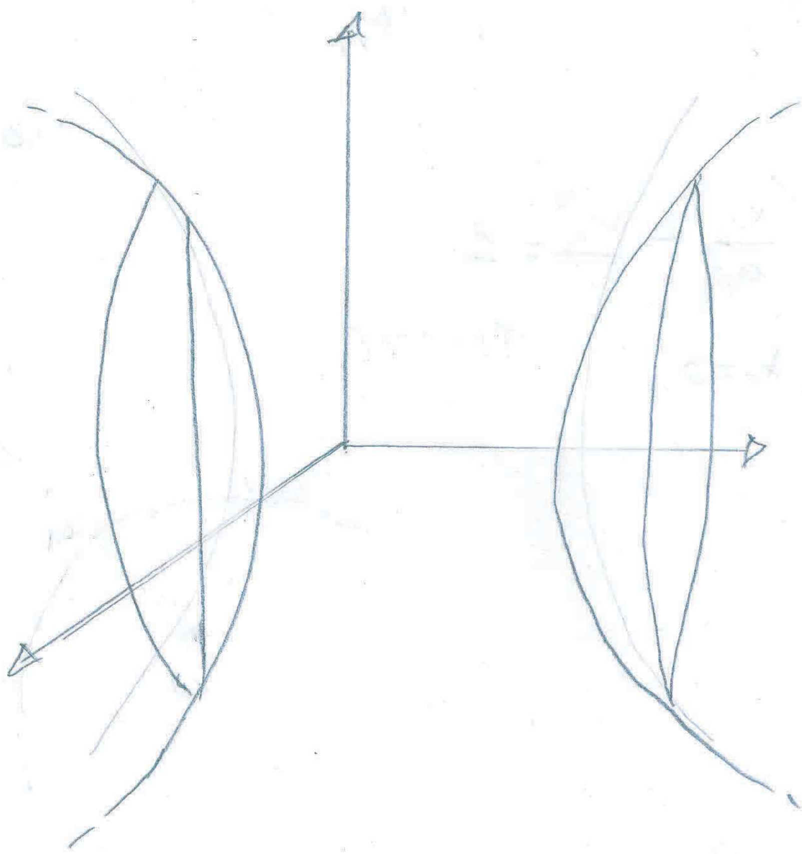


PER $x_2 = k$ e $x_3 = k$

SI PROCEDE ANALOGAMENTE

(1,2): $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2} - \dfrac{x_3^2}{a_3^2} = 1$

IPERBOLOIDE A DUE FALDE



2

STUDIAMO LA MATRICE $\underline{A}$ ASSOCIATA ALLA QUADRICA:

- $rg\, A = m$
- $d = 0$ RIDUCENDO CON GAUSS: $\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}+\dots+\frac{z_i^2}{a_i^2}-\frac{z_{i+1}^2}{a_{i+1}^2}-\dots-\frac{z_m^2}{a_m^2}=0$

Se $P \equiv (x_1,\dots,x_m) \in$ Quadrica $\Rightarrow \forall P'=(tx_1,\dots,tx_m) \in$ Quadri

Se $P \in$ Quadrica, la retta passante per P e per l'origine appartiene alla quadrica; TALE QUADRICA SI DICE "RIGATA"

STUDIO LA SEGNATURA: CAMBIO I SEGNI AI TERMINI DELL'EQUAZIONE MOLTIPLICANDO PER -1: ESSENDO L'EQUAZIONE OMOGENEA, TROVO LE SEGNATURE $(m,0), (m-1,1), \dots, (1,m-1)$ CHE DANNO QUADRICHE DIVERSE.

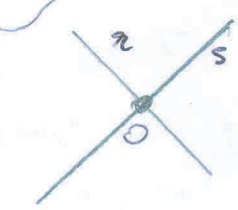
In questo specifico caso:

- se m è pari $\Rightarrow \exists\ \frac{m}{2}$ tipi diversi di iperquadriche rigate
- se m è dispari $\Rightarrow \exists\ \frac{m-1}{2}$ tipi diversi di iperquadriche rigate
- CONSIDERO ANCHE IL CASO $(m,0)$ CHE DÀ PERÒ SOLO L'ORIGINE $\Rightarrow$
- se SOMMA DI QUADRATI $\Rightarrow$ UNICA possibilità: origine

---

$m=2 \Rightarrow \exists!$ conica: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ si può scomporre come:

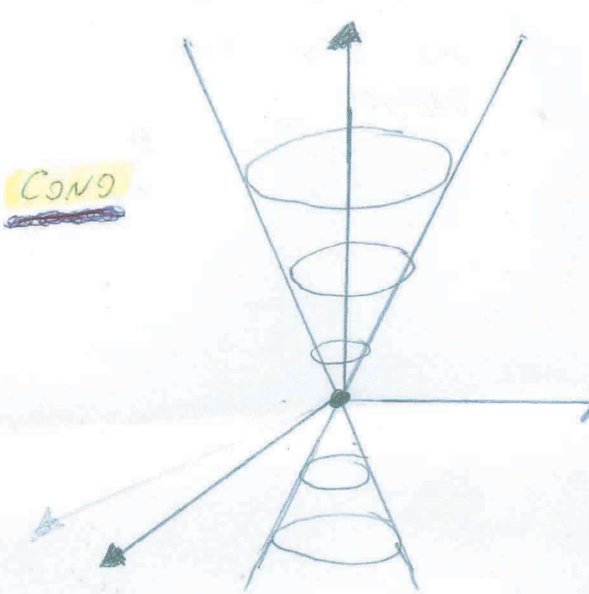
$$\underbrace{\overset{r}{\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}\overset{s}{\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}}_{\text{2 rette}}=0$$



3

$m=3 \Rightarrow \exists!$ una superficie quadrica:

$(2,1) \Rightarrow \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$ CONO



Poniamo $x_1 = k$:

$-\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=\frac{k^2}{a_1^2}$ IPERBOLE

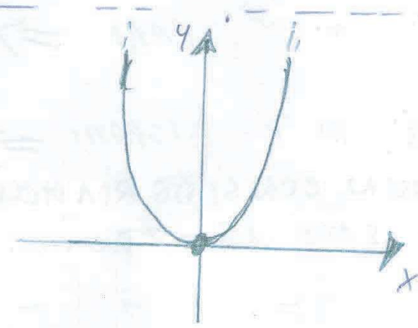
SE NON RIUSCIAMO A ELIMINARE LA PARTE LINEARE NELLA RIDUZIONE AI QUADRATI (NON RIUSCIAMO A FAR "SCOMPARIRE" TUTTI I MONOMI DI GRADO 1) $\rightarrow \det A = 0$ ma $\det A_1 \neq 0$ (EQUAZIONE OMOGENEIZZATA CON L'AGGIUNTA DI x_0)

QUINDI NELL'EQUAZIONE IN FORMA CANONICA SARANNO PRESENTI TUTTE LE VARIABILI: $\cancel{\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\dots+\frac{x_{m-1}^2}{a_{m-1}^2} \; x_m}$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\dots+\frac{x_i^2}{a_i^2}-\frac{x_{i+1}^2}{a_{i+1}^2}-\dots-\frac{x_{m-1}^2}{a_{m-1}^2}=x_m$$

- Se m è PARI $\Rightarrow \exists \ \frac{m}{2}$ TIPI DIVERSI DI IPERQUADRICHE
- Se m è DISPARI $\Rightarrow \exists \ \frac{m+1}{2}$ TIPI DIVERSI DI IPERQUADRICHE

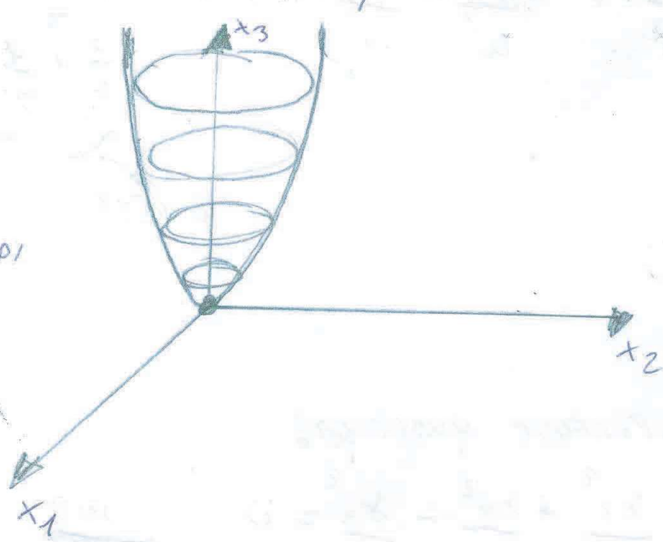
$m=2 \Rightarrow \exists!$ CONICA: $\frac{x_1^2}{a_1^2}=y$ PARABOLA



$m=3 \Rightarrow \exists$ 2 TIPI DIVERSI DI IPERQUADRICHE:

- $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=x_3$

PARABOLOIDE ELLITTICO



$x_3=k$: ALL'AUMENTARE DI k AUMENTANO GLI ASSI DELLE ELLISSI.

UN'ALTRA IPERQUADRICA PER $n=3$:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=x_3$$ PARABOLOIDE IPERBOLICO (O SUPERFICIE A SELLA)

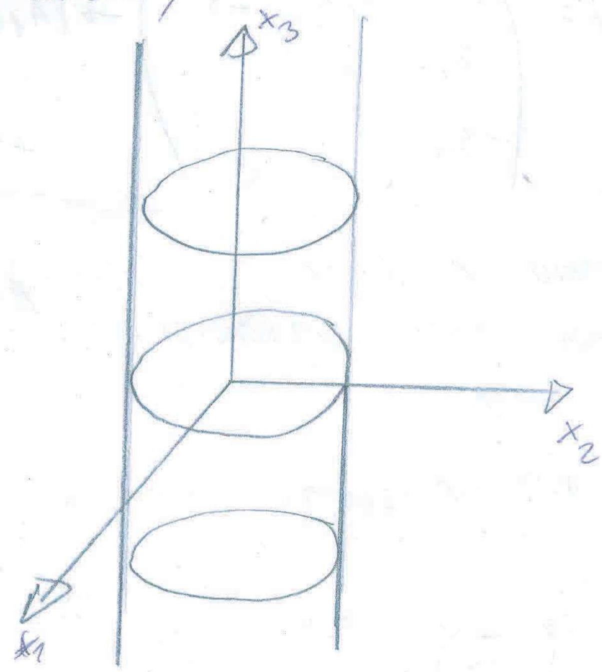
SE MANCANO DELLE VARIABILI NELL'EQUAZIONE OTTENIAMO CILINDRI E IPERQUADRICHE SPEZZATE IN VARIE PARTI.

$n=2$: $x_1^2=a^2 \rightarrow (x_1-a)(x_1+a)=0$: 2 RETTE PARALLELE

$n=3$: POSSONO MANCARE 1 O 2 VARIABILI;

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=k \quad ; \quad \frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=k$$

COMUNQUE CAMBIAMO x_3 OTTENIAMO SEMPRE LA STESSA ELLISSE (TRASLATA): CILINDRO ELLITTICO



CILINDRO PARABOLICO

ESERCIZIO:

TRACCIARE IL GRAFICO DELLA QUADRICA $x^2-4xy-2y^2-3x-3y+6=0$ NELLA BASE CANONICA:

CAMBIAMO SISTEMA DI RIFERIMENTO ATTRAVERSO OPERAZIONI ISOMETRICHE.

✓ OMOGENEIZZIAMO L'EQUAZIONE:

$$x^2-4xy-2y^2-3xx_0-3yx_0+6x_0=0$$

$$A_1=\begin{pmatrix}6 & -3/2 & -3/2\\ -3/2 & 1 & -2\\ -3/2 & -2 & -2\end{pmatrix}\rightarrow |A_1|\neq 0$$

6

MATRICE ASSOCIATA ALLA PARTE QUADRATICA: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

✓ DIAGONALIZZIAMO CON UNA MATRICE $S\in M_{2\times 2}$ ORTOGONALE

TROVO GLI AUTOVALORI: $\lambda=2$ e $\lambda=-3$

$$D=S^TAS \Longrightarrow D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} \text{ e } S=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & 1/\sqrt5\\ 1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}$$

S ha per colonne gli AUTOVETTORI NORMALIZZATI e ORTOGONALI

[S] MI PERMETTE DI CAMBIARE COORDINATE:

• $x^2-4xy-2y^2$ DERIVA DA:

$X^TAX+B^TX+6=0$; se $Y=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ è IL NUOVO VETTORE-COORDINATE $\Longrightarrow Y^TDY$

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=X \qquad B=\begin{pmatrix}-3\\ -3\end{pmatrix}$

$$x^2-4xy-2y^2 \longrightarrow 2x_1^2-3x_2^2$$

So che: $X = SY \Rightarrow \begin{cases} x = -2/\sqrt{5}\, x_1 + 1/\sqrt{5}\, x_2 \\ y = 1/\sqrt{5}\, x_1 + 2/\sqrt{5}\, x_2 \end{cases}$

CAMBIO LE COORDINATE:

- $2x_1^2 - 3x_2^2 - 3\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}x_2\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}x_2\right) + 6 = 0$

SEMPLIFICANDO, L'EQUAZIONE DELLA CONICA DIVENTA:

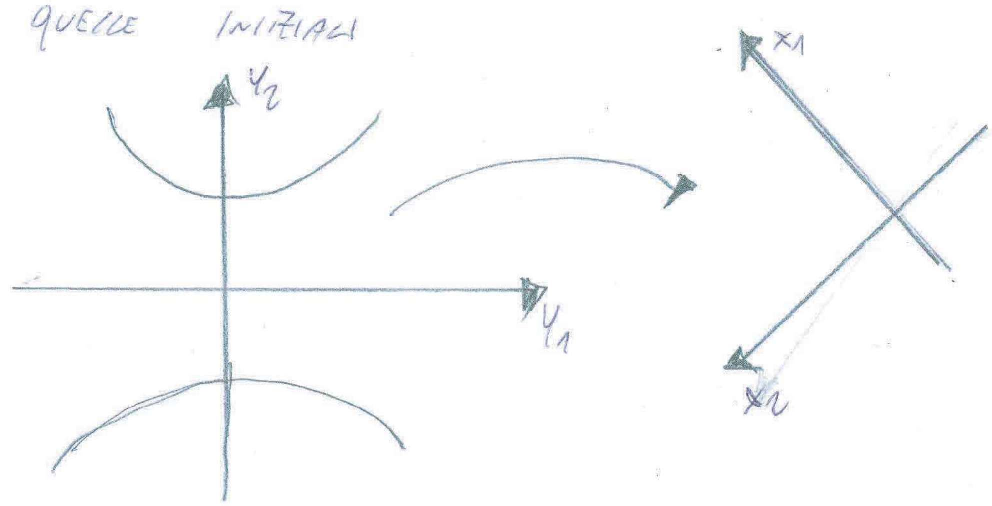
- $\frac{2}{\sqrt{5}}x_1^2 - \frac{3}{\sqrt{5}}x_2^2 + 3x_1 - 9x_2 + \frac{5}{\sqrt{5}} = 0$

SI RIDUCE CON GAUSS:

- $\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x_1 + \frac{3}{4\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{3}{\sqrt{5}}\left(x_2 + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{245}{8\sqrt{5}} = 0;$

$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{3}{4\sqrt{5}} \\ y_2 = x_2 + \frac{3}{2\sqrt{5}} \end{cases} \rightarrow -\frac{2}{\sqrt{5}}y_1^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}y_2^2 = \frac{245}{8\sqrt{5}}$ <u>IPERBOLE</u>

- SI DISEGNA IN QUESTE NUOVE COORDINATE, POI SI PASSA A QUELLE INIZIALI



DA NOTARE CHE I COEFFICIENTI DI x_1 e x_2 SONO 1: TRASFORMAZIONE <u>ISOMETRICA</u> (GAUSS).
ALTRIMENTI AVREMO AVUTO UNA DILATAZIONE DEL SdR OLTRE CHE UNA TRASLAZIONE.