25 ottobre

Proposizione: Dato uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{R}$, due basi qualunque hanno la stessa cardinalità.

Dimostrazione: Prendiamo due basi qualunque dello spazio V di cardinalità: k ed l. $\Rightarrow$ Siano $B_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ basi di V

$B_2 = \{w_1, \dots, w_l\}$ BASE di V

Per assurdo supponiamo che $k \neq l$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Prendo } k < l}$

Assumo B_1 come base di V $\Rightarrow$ $w_1 = \sum_{j=1}^{k} a_{j1} v_j$, $w_2 = \sum_{j=1}^{k} a_{j2} v_j$,

$w_l = \sum_{l=1}^{k} a_{jl} v_j$ ESSENDO I v_j GENERATORI DI V

Pongo $b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_l w_l = 0 \Rightarrow b_1 \left(\sum_{j=1}^{k} a_{j1} v_j \right) + b_2 \left(\sum_{j=1}^{k} a_{j2} v_j \right) + \dots$

$+ b_l \left(\sum_{j=1}^{k} a_{jl} v_j \right) = 0$

(ho sostituito $w_1, w_2, \dots, w_l$ con le sommatorie)

$$\sum_{j=1}^{k} b_1 a_{j1} v_j + \sum_{j=1}^{k} b_2 a_{j2} v_j + \dots + \sum_{j=1}^{k} b_l a_{jl} v_j = 0$$

$$\Rightarrow (b_1 a_{11} + b_2 a_{12} + \dots + b_l a_{1l}) v_1 + \dots$$

$$+ (b_1 a_{k1} + b_2 a_{k2} + \dots + b_l a_{kl}) v_k = 0$$

Questa è una combinazione lineare dei v_j.

Perché questa combinazione sia nulla, devono essere nulli i coefficienti,

poiché $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Sigma_0 \begin{cases} b_1 a_{11} + b_2 a_{12} + \dots + b_l a_{1l} = 0 \\ b_1 a_{21} + b_2 a_{22} + \dots + b_l a_{2l} = 0 \\ \vdots \\ b_1 a_{k1} + b_2 a_{k2} + \dots + b_l a_{kl} = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare omogeneo di k equazioni in l incognite con $k < l$.

Tale sistema ha al massimo rango k

$\Rightarrow$ Sol Σ_0 ha $\infty^{(l-k)}$ soluzioni con $l-k>0 \Rightarrow \exists$ soluzioni $\neq (0, \dots, 0)$

$\Rightarrow$ i vettori $w_1, \dots, w_l$ sono linearmente dipendenti: è un assurdo con quanto ipotizzato CHE $B_2 = \{w_1, \dots, w_l\}$ È BASE

$\Rightarrow$ ABBIAMO SBAGLIATO A SUPPORRE $k<l$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Prendo allora } k>l}$

e CONSIDERO $B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ come base di V: con un ragionamento analogo al precedente arriviamo ad un assurdo con quanto ipotizzato!

$\Rightarrow$ ABBIAMO SBAGLIATO A SUPPORRE $k>l$ $\Rightarrow$ DEVE ESSERE $k=l$!

c.v.d.

Osservazioni: In uno spazio vettoriale n-dimensionale, $n+k$ vettori, con $k>0$, sono SEMPRE linearmente dipendenti

Proposizione: Data una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale V, n-dimensionale, ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di B

Dimostrazione: Per assurdo supponiamo che $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ e $v = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$

con $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (b_1, b_2, \dots, b_n) \Rightarrow$

POICHÈ $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \Rightarrow (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) - (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n) = 0$

$\Rightarrow (a_1 - b_1) v_1 + (a_2 - b_2) v_2 + \dots + (a_n - b_n) v_n = 0$

$\Rightarrow$ poichè $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti,

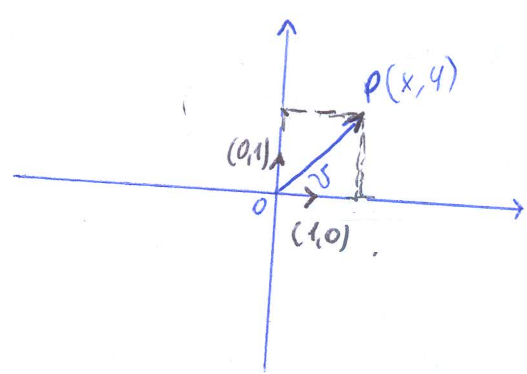
si ha $\begin{cases} a_1 - b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n - b_n = 0 \end{cases} \Rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

E LA SCRITTURA È UNICA. c.v.d.

Fissata su V la base $B = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$

$\Rightarrow$ i coefficienti di tale combinazione lineare unica sono le <u>coordinate</u> di v nella base data e abbiamo l'identificazione tra v e il vettore delle coordinate IN TALE BASE

$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$



$V = \mathbb{R}^2$

$[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Esempio: sia $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$: è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Voglio cercare una sua base dello spazio di matrici 2×3

CONSIDERO QUESTI SEI elementi dello spazio vettoriale: ④

$$V_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad V_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad V_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$V_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad V_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad V_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Dimostro la lineare indipendenza:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\dots+\alpha_6\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Moltiplico per lo scalare α_j OGNI MATRICE:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\alpha_2&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\alpha_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(Sommo i vettori)

$$\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\\alpha_4&\alpha_5&\alpha_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

L'EQUAZIONE VETTORIALE EQUIVALE AL SISEMA SCALARE OTTENUTO UGUAGLIANDO LE ENTRATE CORRISPONDENTI

Quindi:

$$\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\\\vdots\\\alpha_6=0\end{cases}\Rightarrow \text{i } V_j \text{ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI}$$

Dimostro che sono generatori: (Quindi preso un qualunque $X=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\end{pmatrix}$ vettore dello spazio vettoriale,

$$\exists\,\alpha_1,\dots,\alpha_6\in\mathbb{R}\ \Big|\ \alpha_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\dots+\alpha_6\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

(la combinazione dei vettori dati dà questo vettore X)

$$=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\end{pmatrix}$$

con ragionamento analogo al precedente:

$$\begin{cases}\alpha_1=x_1\\\alpha_2=x_2\\\vdots\\\alpha_6=x_6\end{cases}$$

Perciò se considero $V=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\end{pmatrix}\Rightarrow [V]_B=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}$

Si chiamano <u>basi canoniche</u> le basi formate da VETTORI CON 1 COORDINATA PARI A 1 E LE ALTRE NULLE ~~[illegible]~~.

la base canonica si indica con $\mathcal{C}$ (maiuscolo:) $\mathcal{C}_{M_{2\times3}} = \left\{ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \right\}$

In $\mathbb{R}^n$ esiste la base canonica $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \right\}$

In $\mathbb{R}^3$ indichiamo solitamente tali vettori con le lettere i, j, k ....: ~~[illegible]~~ (SONO I VERSORI)

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \hat{\imath} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \hat{\jmath} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \hat{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$ BASE CANONICA di $\mathbb{R}^3$

~~Sempre in R, con la base canonica~~ In generale per spazi vettoriali ~~maggiori~~ di dimensione n li chiamiamo come e_j. $j = 1, \dots, n$

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_n \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \right\}$$

OSS: dato $v = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow [v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

ESEMPIO

Se considero $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow [v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

ESERCIZIO:

Se cambio base in $\mathbb{R}^3$ e prendo $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ cerco $[v]_B$.

VEDIAMO DAPPRIMA COME DARE UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$:

1) Posso operare prendendo un vettore casuale: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$;

se prendo $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\Rightarrow$ POICHÉ $v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1$ e v_2 SONO LINEARMENTE DIPENDENTI ($\underset{1}{\alpha} v_1 + \underset{1}{\beta} v_2 = 0 \Rightarrow$ CON $\alpha = 1$ e $\beta = 1$).

INFATTI se v_1, v_2 sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 = 0$ con $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

OSSERVAZIONE:

$\Rightarrow$ LE COORDINATE DI UN VETTORE SONO MULTIPLE DI QUELLE DELL'ALTRO: INFATTI SE Suppongo $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha v_1 = -\beta v_2$

Divido per α: $v_1 = -\dfrac{\beta}{\alpha} v_2$

allora la coppia $V_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ e $V_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ non va bene, perché PER FORMARE UNA BASE SERVONO VETTORI linearmente indipendenti!

Prendo allora UN NUOVO VETTORE V_2 : $V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ (ad esempio)
$V_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ e $V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ ~~quindi che~~ sono linearmente indip. indipendenti PERCHE' NON SONO MULTIPLI L'UNO DELL'ALTRO.!

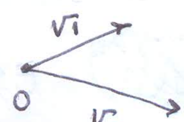
PRENDIAMO 3 vettori: IN PRATICA ESSI SONO LIN. DIPENDENTI SE UNO DI ESSI E' COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI. INFATTI:

Se V_1, V_2, V_3 sono linearmente dipendenti

$$\Rightarrow \alpha V_1+\beta V_2+\gamma V_3=0 \quad \text{con } (\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$$

$\gamma V_3 = -\alpha V_1 - \beta V_2$ se $\gamma\neq 0 \Rightarrow$ posso dividere per γ e ottengo $V_3 = -\frac{\alpha}{\gamma}V_1 - \frac{\beta}{\gamma}V_2$.

SE PRENDIAMO UN VETTORE V_1 IN UNO SPAZIO n-DIMENSIONALE $\Rightarrow$ ESSO "GENERA" UNA RETTA: retta generale di V_1 si scrive: $\langle\langle V_1\rangle\rangle$; DUE VETTORI LIN. INDIPENDENTI GENERANO UN piano: è $\langle\langle V_1, V_2\rangle\rangle$:



K VETTORI LIN. INDIPENDENTI GENERANO UNO SPAZIO k-DIMENSIONALE W : $W=\langle\langle v_1, v_2, \dots, v_k\rangle\rangle$. $\forall k\in\mathbb{N}$

DUE VETTORI LIN. DIPENDENTI STANNO SULLA STESSA RETTA PER L'ORIGIN

TRE VETTORI LIN. DIPENDENTI STANNO SUL PIANO GENERATO DA DUE DI ESSI LINEARM. INDIPENDENTI, E COSÌ VIA.

Esercizio per casa:

Dimostrare che $V_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ $V_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti e trovare le coordinate dei vettori in questa base