Voglio risolvere un sistema Σ lineare non omogeneo.

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

- Stiamo lavorando in $\mathbb{R}^3$ (spazio tridimensionale).
- Le soluzioni sono terne di numeri reali. (punti dello spazio 3D).

Una prima matrice associabile, detta "matrice dei coefficienti" o "matrice incompleta"

1^a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \underset{\substack{3\times 3 \\ \text{quadrata}}}{\mathcal{M}}(\mathbb{R})$$

Su questa matrice andremo alla ricerca dei pivot

2^a) Una seconda matrice associabile ad Σ è quella detta "matrice completa" in cui compaiono i termini noti

$$(A \,\vdots\, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \in \underset{\substack{3\times 4 \\ \text{rettangolare}}}{\mathcal{M}}(\mathbb{R})$$

è già un primo PIVOT

Se lavoriamo sulla matrice completa, una volta arrivati alla forma canonica a gradini abbiamo già le soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\xrightarrow{R_1 - R_3 \to R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

abbiamo già sotto il primo Pivot tutti gli 0 quindi ci concentriamo sulla 2^a e 3^a riga

2° PIVOT

$$\underset{R_2+R_3 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La parte "in discesa" è finita, ho trovato la matrice ridotta a gradini.

2 PIVOT

È la matrice A che ci dà il rango, non tutta $(A \,\vdots\, B)$

$$\text{rango} = rg(A \,\vdots\, B) = 2 = rg\,A$$

L'ultima equazione non disturba perché per trovare le soluzioni dobbiamo avere delle identità che in questo caso sono rispettate ($0=0$). Se avessimo trovato un numero al 2° membro della 3^a riga (esempio: $0\ 0\ 0 \,\vdots\, 3$) il sistema sarebbe stato IMPOSSIBILE perché non ci sarebbe stata una identità COME TERZA EQUAZIONE.

POICHÉ IL RANGO DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI È 2 ⇒ LE SOLUZIONI DEL SISTEMA (CHE ORA SAPPIAMO ESSERCI) SONO

$$\infty^{\#\text{VARIABILI} - rg A} = \infty^{3-2} = \infty^1$$

: LE SOLUZIONI SONO TUTTI I PUNTI DI UNA RETTA DI $\mathbb{R}^3$.

Il passo successivo è ottenere 0 sopra e sotto tutti i pivot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{R_1+2R_2 \to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{-1\cdot R_2 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

MATRICE RIDOTTA A GRADINI

Torniamo al sistema associando i valori trovati con le matrici.

$$\begin{cases} x - z = 5 \\ y - z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Quando riassocio al sistema l'ultima riga può essere tolta, cosa che non si poteva fare con le matrici!

$$\begin{cases} x - z = 5 \\ y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z + 5 \\ y = z - 2 \end{cases}$$

Questa è l'equazione cartesiana della nostra retta

z è "DETTA "VARIABILE LIBERA" O "PARAMETRO"" e otteniamo due incognite che dipendono da essa. E SONO DETTE "VARIABILI LEGATE"

Ci sono infinite soluzioni $\infty^{\#\text{variabili} - rg\,\Sigma} = \infty^{3-2} = \infty^{1}$ (una retta intera)

Il metodo di eliminazione di Gauss si applica a sistemi di qualunque grandezza.

Se avessimo avuto ∞^2, le soluzioni sarebbero state infinite DOPPIAMENTE, cioè RICOPRONO UN PIANO DI $\mathbb{R}^3$

ABBIAMO VISTO DUNQUE CHE PER RISOLVERE UN SISTEMA LINEARE SI PUÒ AGIRE SOLO CON MATRICI E OPERARE SU DI ESSE

STUDIAMO ORA PIÙ A FONDO L'INSIEME DELLE MATRICI.

Esistono matrici triangolari (abbiamo già visto le rettangolari e le quadrate).

VEDIAMO INNANZI TUTTO CON QUALE SCRITTURA SI PUÒ RAPPRESENTARE UNA MATRICE CON K RIGHE E n COLONNE:

$$A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,m}}$$

(i indice di riga) (j indice di colonne)

ES: $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$\forall i,j$, α_{ij} SONO SCALARI (NUMERI) E SI DICONO ENTRATE DI A.

NOTAZIONI:

$\mathbb{N}$ = num. naturali	$\mathbb{Z}$ = interi relativi	$\mathbb{Q}$ = razionali	$\mathbb{R}$ = reali	$\mathbb{C}$ = complessi

Una matrice quadrata ha stesso numero di righe e di colonne

$$A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Nelle matrici quadrate si può DEFINIRE la diagonale PRINCIPALE: è l'insieme delle ENTRATE ~~che stanno sulla diagonale principale~~

$\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}\}$ = diagonale principale. Da sinistra alto a destra basso

La diagonale secondaria sono $\{\alpha_{13}, \alpha_{22}, \alpha_{31}\}$: Da basso sinistra ad alto destra

DEFINIZIONE: Si dice MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE una matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che posto $A = (\alpha_{ij})$, $\alpha_{ij} = 0 \ \forall i > j$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & & & & & & \\ 0=\alpha_{21} & \alpha_{22} & & & & & \\ 0=\alpha_{31} & \alpha_{32}=0 & \alpha_{33} & & & & \\ 0=\alpha_{41} & \alpha_{42}=0 & \alpha_{43}=0 & \alpha_{44} & & & \\ 0=\alpha_{51} & \alpha_{52}=0 & \alpha_{53}=0 & \alpha_{54}=0 & \alpha_{55} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & & \alpha_{n\,n-1} \\ \alpha_{n1}=0 & \alpha_{n2}=0 & \alpha_{n3}=0 & \alpha_{n4}=0 & \dots & & \alpha_{n}=0 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO DI TRIANG. SUPERIORE 3x3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

DEF: $\boxed{\text{TRIANGOLARE INFERIORE}}$ È UNA MATRICE QUADRATA IN CUI TUTTE LE ENTRATE AL DI SOPRA DELLA DIAGONALE PRINCIPALE SONO NULLE CIOÈ $\alpha_{ij} = 0 \ \forall i < j$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa è una matrice sia triangolare superiore che inferiore.

È anche una matrice diagonale.

DEFINIZIONE: Si dice MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE una matrice $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ tale che posta $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$

- Si dice matrice diagonale una matrice $A = (a_{ij})_i \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tale che $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$

ES: $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

[Gli 0 ci sono sia sopra che sotto la diagonale principale]

Considero $\mathcal{M}_{K \times n}(\mathbb{R})$: insieme delle matrici ad entrate reali $K \times n$

Introduciamo alcune operazioni ~~[illegible]~~:

Definisco in $\mathcal{M}_{K \times n}(\mathbb{R})$ l'operazione SOMMA, operazione binaria, interna poiché AGISCO SU una coppia di matrici $K \times n$ e il risultato sarà una matrice $K \times n$.

Date due matrici $K \times n$ $A, B \in \mathcal{M}_{K \times n}(\mathbb{R})$ con $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,n}}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,n}}$ $\Rightarrow$

DEFINISCO L'OPERAZIONE:

$$\hat{+} : \mathcal{M}_{K \times n} \times \mathcal{M}_{K \times n} \longrightarrow \mathcal{M}_{K \times n}$$

$$\boxed{(A, B) \longmapsto A \hat{+} B = C}$$

NEL SEGUENTE MODO:

$$A \hat{+} B = C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,n}} \text{ CON: } C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,n}}$$

$\hat{+}$ ↓ OPERAZIONE TRA MATRICI

$+$ ↓ OPERAZIONI TRA NUMERI

Esempi:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & \pi \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & \pi \end{pmatrix}$$

$$A \hat{+} B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-1 & 3+1 \\ -1+\sqrt{2} & 0-1 & 1+\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1+\sqrt{2} & -1 & 1+\pi \end{pmatrix}.$$

(DA ORA IN POI INDICHEREMO QUESTA NUOVA OPERAZIONE ANCORA SEMPLICEMENTE CON $+$)

Questa operazione VERIFICA ALCUNE PROPRIETÀ:

1). ASSOCIATIVA : Date $A, B, C \in \mathcal{M}_{K \times m} \Rightarrow (A+B)+C = A+(B+C)$

DIMOSTRAZIONE: Prendo $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,m}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,m}}$, $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,m}}$

$$(A+B)+C = \big((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,m}}$$

$$A+(B+C) = \big(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\big)_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,m}}$$

DATE DUE MATRICI $F = (f_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,m}}$ e $G = (g_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,m}}$ $F, G \in \mathcal{M}_{K \times m}(\mathbb{R})$ SONO UGUALI $\Longleftrightarrow$ SONO UGUALI LE ENTRATE CORRISPONDENTI

CIOÈ: $F = G \Longleftrightarrow f_{ij} = g_{ij} \ \forall i,j$

PERTANTO:

$$(A+B)+C = A+(B+C) \Longleftrightarrow (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) \quad \forall i,j$$

Ciò è verificato poiché la somma tra numeri reali è ASSOCIATIVA

2). COMMUTATIVA : $A+B = B+A$

3). Esiste l'ELEMENTO NEUTRO DI $\hat{+}$: È LA MATRICE NULLA $0 = (0)_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,m}}$

CIOE':

3). $\forall A \in \mathcal{M}_{k\times m}(\mathbb{R}) \Rightarrow A + O = A$

4). Date $A \in \mathcal{M}_{k\times m}$ $\exists$ il suo opposto, cioè la matrice indicata con $-A = (-a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,m}}$

[DIMOSTRARE CHE $A + (-A) = O$]

DIMOSTRARE I PUNTI DAL 2) AL 4) CON IL PROCEDIMENTO GENERALE USATO PER LA DIMOSTRAZIONE DELLA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELLA SOMMA TRA MATRICI $\left(\overset{1}{+}\right)$.

[POICHÈ LA SOMMA TRA MATRICI VERIFICA LE PROPRIETÀ 1), 2), 3), 4) $\Rightarrow$ L'INSIEME DELLE MATRICI $\mathcal{M}_{k\times m}$ È UN GRUPPO ABELIANO ADDITIVO.
(COMMUTATIVO)]