28/11/17

Teorema delle dimensioni: Sia $L: V \to W$ applic. lineare, $\dim V = n$, $\dim W = m$, supponiamo che $\dim \operatorname{Ker} L = \underset{p \le n}{p}$ e $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ e $\dim \operatorname{Im} L = q \le m$ con $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} L} = \{w_1, \dots, w_2\} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V$

Dim: Sia $w \in \operatorname{Im} L \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i w_i$ e inoltre $\exists\, v \in V \mid L(v) = w$ e $\exists\, v_1, \dots, v_q \in V$ tali che $L(v_j) = w_j \ \forall j = 1, \dots, q \Rightarrow L(v) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_q L(v_q)$

$\Rightarrow$ essendo L lineare $L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_q v_q) \Rightarrow L(v) - L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_q v_q) = 0_W$

$\Rightarrow L(v - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_q v_q) = 0_W \Rightarrow v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_q v_q \in \operatorname{Ker} L$ (Per def. di nucleo)

$\Rightarrow v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_q v_q = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_p u_p$ (Porto al 2° membro)

$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_q v_q + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_p u_p \Rightarrow v_1, \dots, v_q, u_1, \dots, u_p$ <u>generano V</u>.

SE COSTITUISCONO UNA BASE $\Rightarrow$

Devono essere linearmente indipendenti e ora lo dimostriamo:

pongo $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_p u_p + b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_q v_q = 0_V$

$\Rightarrow L($ " $) = L(0_V) = 0_W$

$\Rightarrow a_1 \underset{0}{L(u_1)} + a_2 \underset{0}{L(u_2)} + \dots + a_p \underset{0}{L(u_p)} + b_1 \underset{w_1}{L(v_1)} + \dots + b_q \underset{w_q}{L(v_q)} = 0_W$

$\Rightarrow b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_q w_q = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 = \dots = b_q = 0$ POICHÉ $w_1, \dots, w_q$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

Ci rimane quindi $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_p u_p = 0_V \Rightarrow$ essendo $\{u_1, \dots, u_p\}$ base di $\operatorname{Ker} L$ si ha che $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$

$\Rightarrow u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ sono lin. indip. e quindi base di $V \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim V = p + q = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L$ Q.E.D.

<u>Es</u>: Esistono applicazioni lineari iniettive tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, cioè $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

So che $\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V$ (dominio di L) $\dim \operatorname{Ker} L \le 3$, $\dim \operatorname{Im} L \le 2$ $\dim V = 3$

Se L deve essere iniettiva $\Rightarrow \operatorname{Ker} L = \{0\}$ e quindi $\dim \operatorname{Ker} L = 0$

$\Rightarrow \dim Ker L + \dim Im L = \dim V$: IN QUESTO CASO $0 + \dim Im L = 3$; MA $\dim Im L \leq 2$, PERCIO'

non esistono applicazioni lineari iniettive fra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Ne esistono di suriettive? L é suriettiva se $Im L = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim Im L = 2$

$$\dim Ker L + \dim Im L = \dim V$$
$$\underset{1}{\overset{\|}{}} \quad\quad 2 \quad = \quad 3$$

Esistono app. lin. suriettive!!! :)

Esempio: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ É una proiezione di $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}^2$ ("schiaccia tutto sul piano $z=0$")

Esistono applicazioni lineari suriettive $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

$\dim Ker L \leq 2$, $\dim Im L \leq 3$

$$\dim Ker L + \dim Im L \neq \dim V$$
$$0 \quad + \quad 3 \quad \neq \quad 2$$

La dim del nucleo deve essere al minimo 0 (N.B. Solo il vuoto ha dim. -1)

OSSERVAZIONE:

Si possono avere applic. lineari suriettive $\Leftrightarrow$ dim. Dominio $\geq$ dim. Codominio.

Si possono avere applic. lineari iniettive $\Leftrightarrow$ dim. Dominio $\leq$ dim. Codominio.

Si possono avere isomorfismi solo tra spazi vett. della stessa dimensione.

ESEMPIO DI ISOMORFISMO

Sia V uno spazio vettoriale reale n-dimensionale; $B_V = \{V_1, \dots, V_n\}$ una sua base

$\Rightarrow$ se $v \in V \Rightarrow v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$. Dò l'applicazione $\phi: V \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ϕ é lineare? DEVO VERIFICARE LE PROPRIETA':

1) $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

2) $\phi(\alpha v) = \alpha \phi(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in V$

VERIFICHIAMO:

1) $u \in V \Rightarrow u = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$

$$u + V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n + X_1 V_1 + X_2 V_2 + \dots + X_n V_n =$$
$$= V_1(\alpha_1 + X_1) + V_2(\alpha_2 + X_2) + \dots + V_n(\alpha_n + X_n)$$

$$\Rightarrow \phi(u+v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + X_1 \\ \alpha_2 + X_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + X_n \end{pmatrix}; \quad \phi(u) + \phi(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + X_1 \\ \alpha_2 + X_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + X_n \end{pmatrix}$$

Sono uguali

2) $\phi(\alpha v) \overset{?}{=} \alpha\phi(v)$

$\alpha v = \alpha x_1 v_1 + \alpha x_2 v_2 + \dots + \alpha x_m v_m$

$$\phi(\alpha v) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix} \quad \phi(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha\phi(v) = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix} \Rightarrow \phi \text{ È LINEARE!}$$

Cerchiamo il nucleo: $\operatorname{Ker} L = \{v \in V : \phi(v) = 0\}$ $\quad \phi(v) = 0_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_m = 0 \end{cases} \Rightarrow v = 0_V \Rightarrow \phi \text{ é } \underline{\text{iniettiva}}$$

Dimostriamo che ϕ é suriettiva:

$$\underset{\overset{\|}{0}}{\dim \operatorname{Ker}\phi} + \underset{\overset{\|}{m}}{\dim \operatorname{Im}\phi} = \underset{\overset{\|}{m}}{\dim V}$$

La $\dim \operatorname{Im}\phi = m$ (ce lo dice il teorema delle dimensione)

$\dim \operatorname{Im}\phi = \dim$ Codominio $\Rightarrow \operatorname{Im}\phi$ Coincide con $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow V \simeq \mathbb{R}^n \Rightarrow V$ È $\boxed{\text{ISOMORFO}}$ A $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ POSSIAMO "USARE" GLI OGGETTI DI $\mathbb{R}^n$ E OPERARE CON LORO COME SE FOSSIMO IN V

ESEMPIO: $V = M_{2\times3}(\mathbb{R})$ spazio vettoriale di dim 6, $\mathcal{B}_{M_{2\times3}} = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}}, \dots, \underset{e_6}{\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}} \right\}$

$$\begin{pmatrix} a&b&c \\ d&e&f \end{pmatrix} = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 + ee_5 + fe_6 \qquad \phi: M_{2\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^6 \qquad \boxed{M_{2\times3} \simeq \mathbb{R}^6}$$

$$\begin{pmatrix} a&b&c \\ d&e&f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{POSSIAMO "USARE" I VETTORI DI } \mathbb{R}^6 \text{ AL POSTO DELLE MATRICI } 2\times3}$

A seconda della base scelta posso avere diverse ϕ.

(L'isomorfismo ϕ non è canonico), in altre parole ho infinite ϕ.

— PROPOSIZIONE —

Dati due spazi vettoriali V, W con $\dim V = n$ e $\dim W = K$, fissati n vettori linear. ind. di V $v_1, \dots, v_n$ e n vettori qualunque di W $w_1, \dots, w_n \Rightarrow$ $\exists$ sempre un'applicazione lineare $L: V \to W$ tale che $L(v_j) = w_j$ per $j = 1, \dots, n$.

Dim: Dato $v \in V$, se conosco $L(v)$, conosco l'applicazione L

Sia $v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \Rightarrow L(v) = L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i L(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$ c.v.d.

— OSSERVAZIONE —

Data $L: V \to W$ se prendo v_1, v_2 con $v_2 = \alpha v_1 \Rightarrow L(v_2) = L(\alpha v_1) = \alpha L(v_1)$

AD ESEMPIO

Se considero $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$L(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $L(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ non esiste!

perché $L(v_1) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $L(v_2) = L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = L\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 2L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$