COMPLETIAMO L'EX. DEL 28/05/2018:

30/05/2018

$$x^2+4xy-2y^2-3x-3y+5=0$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}; \quad S=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & 1/\sqrt5\\ 1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

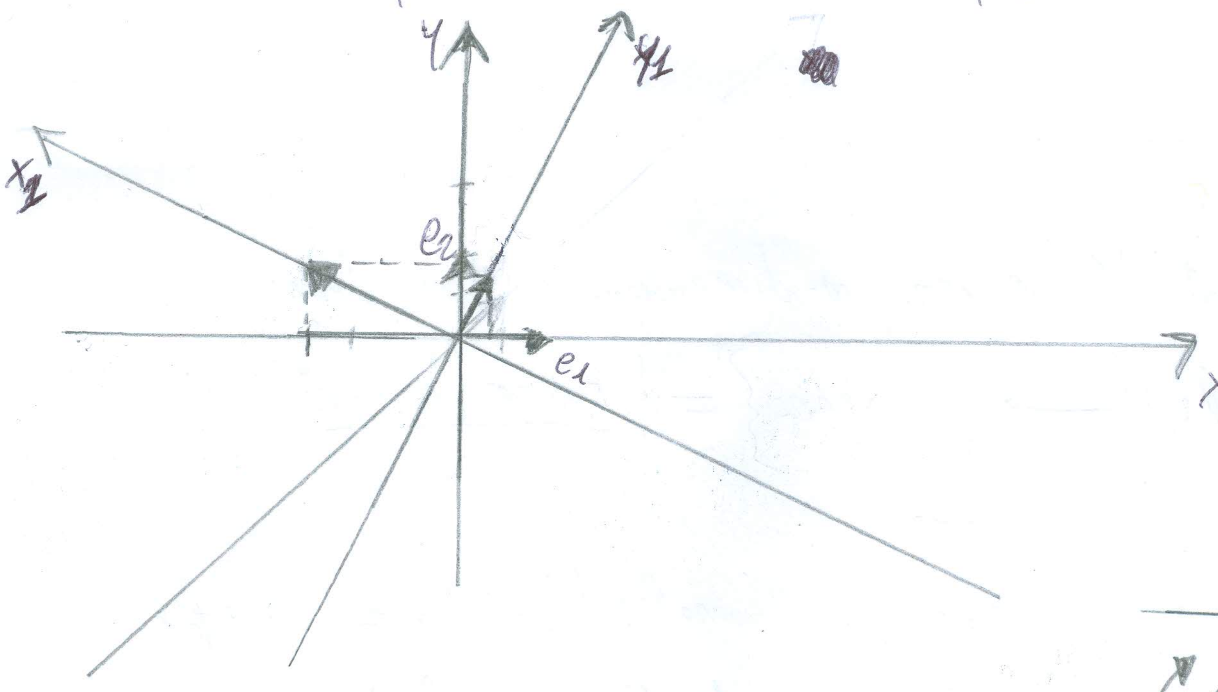
1

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3/4\sqrt5\\3/2\sqrt5\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\frac{3}{2\sqrt5}\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$$

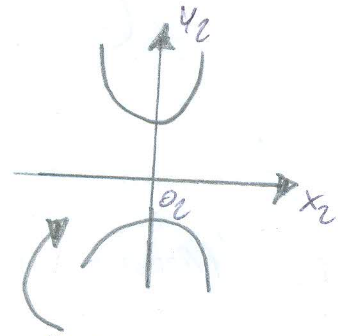
$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=S^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \text{con} \quad S^{-1}=S^T=S$$

PRENDIAMO $C_{\mathbb{R}^2}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$:

$$\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}; \quad \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$



x_1 e x_2 SONO ANCORA ORTOGONALI!



CERCO LE COORDINATE di O nel SdR Oxy: da $O_2x_2y_2$ a Oxy!
LA TRASFORMAZIONE TOTALE è:

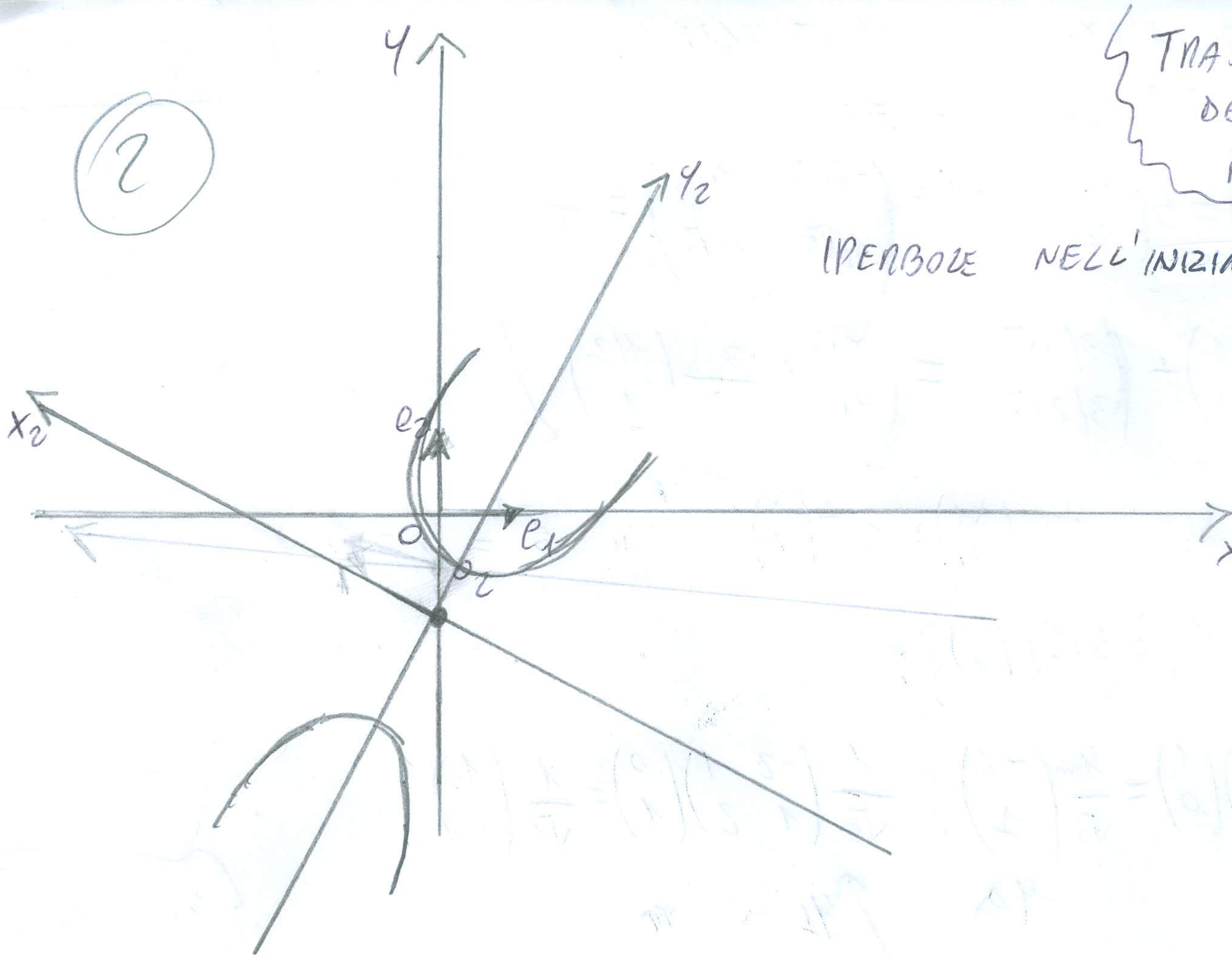
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=S\left[\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}-\frac{3}{2\sqrt5}\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}\right] \qquad \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \ [\text{ORIGINE di } O_2x_2y_2]$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3/4\end{pmatrix}$$

2

TRASLAZIONE DEL GRAFICO PRECEDENTE

IPERBOLE NELL'INIZIALE sdR!



SPAZIO DUALE

Definizione: Dato V sp. vett. n-dimensionale, considero

$$\{f : V \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ \text{CAMPO}}}{K}, \text{ LINEARE}\} = \{\underline{\text{FORME LINEARI}} \text{ su } V\}$$

Si definiscono le operazioni di "somma": $(f_1+f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$
e di "PRODOTTO PER UNO SCALARE": $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$

Con tali operazioni $\{f : V \longrightarrow K, \text{ LINEARE}\}$ diviene uno sp. vett. su K: SPAZIO DUALE di V
$\|$
V^* oppure $V^\vee$

VERIFICHIAMO LE PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI di V^*:

- ASSOCIATIVITÀ DI "+": DATI $l_1, l_2, l_3 \in V^* \Rightarrow (l_1+l_2)+l_3 = l_1+(l_2+l_3)$

Quindi: $\forall v \in V \Rightarrow \left((l_1+l_2)+l_3\right)(v) = \left(l_1+(l_2+l_3)\right)(v)$

3

$$\left(l_1+(l_2+l_3)\right)(v) = l_1(v)+(l_2+l_3)(v) = \underbrace{l_1(v)+l_2(v)+l(v_3)}_{\text{VALGONO LE PROP. DI } K!} =$$

$$= (l_1+l_2)(v)+l_3(v) = ((l_1+l_2)+l_3)(v)$$

- SI VERIFICA IL RESTO

Cerco $\dim(V^*)$:

DEFINISCO la forma $\eta_1 : V \to K$: DEVO CONOSCERE L'IMMAGINE DI UN VETTORE GENERICO $v \in V$: ESSA È CONOSCIUTA SE CONOSCIAMO L'IMMAGINE DEI VETTORI DI BASE, INFATTI So che per una $\underbrace{\text{generica } l}_{\text{FORMA LINEARE}} \Rightarrow l(v) = l\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i\, l(v_i)$, $v_i \in B_V$

Fissata $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ base di $V \Rightarrow$ DEFINIAMO η_1 SUI VETTORI v_j

$\eta_1(v_1)=1$; $\eta_1(v_2)=0$; ...; $\eta_1(v_m)=0 \Rightarrow \begin{cases} \eta_1(v_j)=1 & \text{se } j=1 \\ \eta_1(v_j)=0 & \text{se } j\neq 1 \end{cases}$

ALLO STESSO MODO

DEFINISCO la forma $\eta_2 : V \to K$

η_2 AGISCE COSÌ: $\begin{cases} \eta_2(v_j)=1 & \text{se } j=2 \\ \eta_2(v_j)=0 & \text{se } j\neq 2 \end{cases}$

E COSÌ VIA ... FINO A

$\eta_m : V \to K \Rightarrow \eta_m$ AGISCE COSÌ: $\begin{cases} \eta_m(v_j)=1 & \text{se } j=m \\ \eta_m(v_j)=0 & \text{se } j\neq m \end{cases}$

In generale DEFINIAMO:

$$\eta_j : V \longrightarrow K \quad \forall j=1,\dots,m \quad \text{con} \quad \underbrace{\eta_j(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}}$$

SIMBOLI DI KRONEKER

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

5

BASE DUALE DI $\{v_1,\dots,v_m\}$

VOGLIO DIMOSTRARE che $\{\eta_1,\dots,\eta_m\}$ DEFINISCE una BASE di V^*

1) LINEARE INDIPENDENZA:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \eta_j = 0 \iff a_j = 0 \quad \forall j=1,\dots,m:$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \eta_j = 0 \iff \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \eta_j\right)(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

CONSIDERO: $\left(\sum_{j=1}^{m} a_j \eta_j\right)(v_1) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \eta_j(v_1) =$

$$= a_1 \eta_1(v_1) + a_2 \underbrace{\eta_2(v_1)}_{0} + \underbrace{\dots}_{0} + a_m \underbrace{\eta_m(v_1)}_{0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \underbrace{\eta_1(v_1)}_{1} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

RAGIONANDO ANALOGAMENTE: $\forall$ ALTRO a_k:

$$\left(\sum a_j \eta_j\right)(v_k) = 0 \quad k=1,\dots,m \Rightarrow a_k \underbrace{\eta_k(v_k)}_{1} = 0 \Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k$$

2) $V^* = \langle\langle \eta_1, \dots, \eta_m \rangle\rangle$ cioè:

DATO $\ell \in V^* \Rightarrow \exists\, \beta_1, \dots, \beta_m \in K$ t.c. $\ell = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \eta_j$

VOGLIO DIMOSTRARE che: $\forall v_k \in \mathcal{B}_V$ $\ell(v_k) = \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \eta_j\right)(v_k)$

✓ $\ell(v_1) = \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \eta_j\right)(v_1) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left(\eta_j(v_1)\right) = \beta_1$ (RICORDA I SIMBOLI DI KRONEKER!)

✓ $\vdots$

✓ $\ell(v_m) = \beta_m$

5

Quindi: basta prendere $\beta_j = \ell(v_j)$ C.V.D.

Dimostrate 1) e 2): $\dim(V^*) = \dim(V) = m$

Quindi può esistere un isomorfismo tra V e V^*:

$$\begin{aligned} \phi : V &\longrightarrow V^* \\ v_j &\longmapsto \eta_j \end{aligned} \Rightarrow \phi(v_j) = \eta_j \quad \forall j = 1, \dots, m$$

DIMOSTRIAMO CHE ϕ È UN ISOMORFISMO:

✓ è LINEARE (per come è DEFINITA)

✓ è BIETTIVA: BASTA DIMOSTRARE che $\ker(\phi)$:

se $\phi(v) = 0 \Rightarrow v = 0$

$$\phi\left(\sum a_i v_i\right) = \sum a_i \phi(v_i) = \sum a_i \eta_i = 0$$

$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \eta_i\right)(v_j) = 0 \quad \forall j=1,\dots,m \Rightarrow a_j = 0 \quad \boxed{\forall j = 1,\dots,m} \Rightarrow$

$\text{Ker}\,\phi = \{0\}$ $\Longrightarrow$ Per il Th DELLE DIMENSIONI,

DATO che $\dim(V) = \dim(V^*)$,

$\Downarrow$

$\text{Im}(V) \equiv V^*$

Φ È DUNQUE UN ISOMORFISMO: NON È CANONICO! INFATTI NON È UNICO PERCHÉ DIPENDE DALLE BASI SCELTE.

SPAZIO BIDUALE:

$\{L : V^* \longrightarrow \mathbb{K},\ \text{LINEARE}\} = V^{**}$

6

SI DIMOSTRA COME PRIMA che $\dim(V^{**}) = m$.

e che $\exists\ \Psi : V \longrightarrow V^{**}$ ISOMORFISMO, È CANONICO

(ce n'è solo uno!)