# I PROVA SCRITTA PARZIALE di GEOMETRIA
# FISICA - 27-01-2015

1) [9]

$1_a$) Per quali valori del parametro k ε **R** i vettori $v=\begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix} k \\ -k \\ 2k \end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix}$, formano una base di $\mathbf{R}^3$ ?

$1_b$) Per due degli altri valori di k determinare i sottospazi vettoriali da essi generati , dandone una base , equazione cartesiana , equazione parametrica e la dimensione.

$1_c$) Determinare inoltre la loro intersezione.

2) [5] Determinare l'equazione del piano passante per $P=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ e contenente la retta avente direzione $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$ e passante per $Q=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) [5]

$3_a$) Determinare lo spazio delle soluzioni del sistema $\Sigma = \begin{cases} -2x + y = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ -6x - 2y - 4z = 2 \end{cases}$

$3_b$) Determimare lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo ad esso associato e descrivere la relazione esistente tra i due spazi.

4) [13] Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & h \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$4_a$) Determinare il rango della matrice al variare del parametro reale h;

$4_b$) Scrivere l'applicazione lineare associata alla matrice , prendendo negli spazi dominio e codominio le basi canoniche;

$4_c$) individuare eventuali valori del parametro h per cui l'applicazione è iniettiva, valori per cui è suriettiva, valori per cui è biettiva ;

$4_d$) trovare nucleo e immagine di tale applicazione per ì diversi valori di h , determinando per tali sottospazi la dimensione e una base;

$4_e$) dire se , ponendo h=0 , il vettore v= (1 ,-2, 8, 4 ) appartiene all'immagine dell'applicazione

# I PROVA SCRITTA PARZIALE DI

# GEOMETRIA PER FISICA - 17-02-2015

1) i) Per quali valori del parametro $k \in \mathbf{R}$, i vettori $v_1=\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2=\begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 2k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$

[9] formano una base di $\mathbf{R}^4$?

2 4 ii) Per due dei valori di k per i quali i vettori dati non sono linearmente indipendenti determinare i sottospazi vettoriali da essi generati dandone una base, equazione cartesiana, equazione parametrica e la dimensione.

3 iii) Determinare inoltre dimensione ed equazione della loro intersezione.

2) Determinare l'equazione di una retta passante per $P=(1,1,1)$ e parallela allo spazio

[5] affine $\mathbf{X}=\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z=1\}$

3) i) 3 Determinare lo spazio delle soluzioni del sistema $\Sigma=\begin{cases} x-2y-z=0 \\ -x+2y+3z=2 \\ 3x-6y-7z=-4 \end{cases}$

[5]

ii) 2 Determinare lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo ad esso associato e descrivere la relazione esistente tra i due spazi.

4) Sia data la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & k \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

[13]

3 i) Determinare il rango della matrice al variare del parametro reale k;

1 ii) Scrivere l'applicazione lineare associata alla matrice, prendendo negli spazi dominio e codominio le basi canoniche;

iii) 3 individuare eventuali valori del parametro k per cui l'applicazione è iniettiva, valori per cui è suriettiva, valori per cui è biettiva;

iv) 4 trovare nucleo e immagine di tale applicazione per i diversi valori di k, determinando per tali sottospazi la dimensione e una base;

v) 2 dire se, ponendo $k=0$, il vettore $v=(1,2,0,1)$ appartiene all'immagine dell'applicazione

# I PARZIALE DI GEOMETRIA
# FISICA --- 22-01-2014

1) Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

[10]

$$U_t = \left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle \; ; \; W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

a) Determinare una base $B_W$ e la dimensione di $W$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$, una base $B_{U_t}$ di $U_t$ e la sua dimensione.

b) Determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che $U_t$ e $W$ NON siano in somma diretta. Per tali valori determinare una base di $U_t \cap W$ e completare tale base ad una base di $\mathbb{R}^4$

2) Si consideri l'endomorfismo $f_k$ di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia

[8]

$$A_k = \begin{pmatrix} -1+k & k^2 & k^2-1 \\ 1 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare, al variare di $k$, una base di $Im(f_k)$ ed una del Nucleo di $f_k$

b) per quali valori di $k$, $f_k$ è iniettiva?; suriettiva?; biettiva?

3) Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ k & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$

[6]

a) determinare i valori di $k$ per cui $A$ è invertibile

b) scelto uno di tali valori determinarne l'inversa

4) Si considerino le rette $r$ ed $s$ di equazioni cartesiane

[8]

$$r: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Determinare gli eventuali punti di intersezione;

b) Determinare le loro equazioni parametriche;

c) l'equazione del fascio di piani per $r$.

# I Prova Parziale di GEOMETRIA
# per FISICA ---- 14/02/2014

1) Dati i sottospazi $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \right\}$ e $W = \left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle$

[8]

di $\mathbb{R}^4$, determinare

a) basi, dimensioni ed equazioni parametriche di entrambi

b) Una base e la dimensione di $V \cap W$

2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

[8]

a) determinare base ed equazione del Nucleo

b) dire se è biettiva

c) Determinare se il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di $f$

d) determinare la matrice associata ad $f$ nella base canonica (nel dominio e nel codominio)

3) Dato il sistema lineare $\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

[8]

i) dire se è risolubile

ii) determinare lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato: darne una base e disegnarlo

iii) Se possibile, determinare lo spazio delle soluzioni di $\Sigma$ darne un'equazione parametrica e disegnarlo

4) Dati i tre piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni:

[8] $\pi_1 : (\alpha+1)x + y + z = -1$ ; $\pi_2 : x + y - z = \alpha$ , $\pi_3 : 2\alpha x + 2y = 1$ ; $(\alpha \in \mathbb{R})$

determinare:

i) il valore del parametro $\alpha$ per cui appartengono ad uno stesso fascio proprio $\mathcal{F}$;

ii) l'equazione dell'asse del fascio

iii) l'equazione di una retta parallela a tale asse e passante per $(1,0,0)$.