II SCRITTO PARZIALE DI GEOMETRIA
FISICA - 09-06-2014

1) Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ ed il vettore $v_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

[7]

i) determinare gli autovalori della trasformazione lineare associata ad A nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ e dare una base dei corrispondenti autospazi

ii) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$, per i quali v_k è autovettore

iii) Dire se A è diagonalizzabile e se si diagonalizzarla e dare la matrice S che compare nella relazione di similitudine

2) Siano $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$

[8] i) determinare un vettore w di norma 7 ortogonale ad entrambi

ii) determinare l'area del parallelogramma individuato da u e v

iii) determinare il coseno dell'angolo compreso tra i vettori u e v

iv) la proiezione del vettore $t = (1,0,0)^T$ sul piano generato dai vettori u e v

3) Studiare l'operatore associato alla matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

[8] nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ euclideo

Dopo aver verificato l'ortogonalità di tale matrice, determinare gli elementi caratteristici dell'operatore isometrico.

4) Data la quadrica di $\mathbb{R}^3$ di equazione

[8]

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 4yz - 2x + 4y - 2z + 1 = 0$$

i) Ridurre l'equazione in forma canonica rispetto ad un sistema di assi ortogonali, precisando il tipo di quadrica.

ii) Determinare le equazioni dei nuovi assi del sistema di riferimento nelle coordinate iniziali ed il cambiamento di coordinate effettuato

II Prova scritta parziale di GEOMETRIA
FISICA 11-06-2015

1) È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

i) l'endomorfismo associato ad A in base canonica si trovino le equazioni degli autospazi di T e dei loro complementi ortogonali

ii) si determinino basi ortonormali per tali autospazi

iii) si dica se A è diagonalizzabile.

2) Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione determinata dalla matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

i) Verificare che T è un'isometria

ii) determinare il tipo di isometria e gli eventuali elementi caratteristici (asse, piano di rotazione o di simmetria, angolo, ...)

iii) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $[T]_{\mathcal{B}}$ sia in forma canonica

3) Si determini una base ortonormale del piano $\pi_0 \in \mathbb{R}^3$

i) euclideo, generato dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

ii) l'equazione del fascio di piani perpendicolari a tale piano π_0 e passanti per $P := (1, 1, 0)$

iii) la proiezione ortogonale su π_0 del vettore $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$