Soluzioni della prova scritta di Geometria per Fisica, 2 luglio 2020

Esercizio 1. (8 punti) Nello spazio si considerino le due rette r ed s definite da:

$$r\colon \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 3 - 7t, \\ z = -1 - 5t, \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} 4x - y - z + 3 = 0, \\ 2x + 2y - 4z + 4 = 0. \end{cases}$$

(i) Determinare la posizione relativa di r ed s.
(ii) Determinare, se esiste, un piano contenente entrambe le rette r ed s.
(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di un piano ortogonale ad s e passante per il punto $A = (-2, 1, -1)$.
(iv) Fissato, a vostra scelta, un punto B della retta s, determinare il punto C della retta r che ha distanza minima da B.

Esercizio 2. (8 punti) Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - w = 0, \\ x - 2y + z + 2w = 0. \end{cases}$$

(i) Determinare la dimensione e una base ortonormale di V.
(ii) Determinare una base ed equazioni cartesiane del complemento ortogonale $V^\perp$ di V.
(iii) Completare la base ortonormale di V trovata in (i) ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.
(iv) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $u = (1, -1, 0, 1)^T$ su V e su $V^\perp$.

Esercizio 3. (6 punti) Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + ky - z = 1, \\ 2kz - x - y = 1, \\ x - 2y - z = 1, \end{cases}$$

al variare del parametro reale k. Determinare per quali valori di k il sistema è risolubile e, per tali valori di k, trovare l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 4. (12 punti) Data l'applicazione $T_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T_k(x, y, z) = (2x - ky, y - 2x - z, 2y + kz)$$

al variare del parametro reale k,

(i) verificare che T_k è lineare per ogni $k \in \mathbb{R}$ e scrivere la matrice associata a T_k nelle basi canoniche;
(ii) determinare per quali valori di k l'applicazione T_k è invertibile e per uno di tali valori di k trovare l'inversa di T_k;
(iii) per $k = -1$, determinare la dimensione, una base ed equazioni parametriche e cartesiane del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare T_{-1};
(iv) per $k = 2$, determinare autovalori e autospazi di T_2 e dire se è diagonalizzabile.

Soluzione dell'esercizio 1

Punto (i). Un vettore direttore di r è
$$v_r = (-3, -7, -5).$$
Risolvendo il sistema lineare che definisce la retta s troviamo:
$$\begin{cases} 4x - y - z + 3 = 0, \\ x + y - 2z + 2 = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2z - 2 - x, \\ 5x - 3z + 5 = 0, \end{cases} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} 5x = 3z - 5, \\ 5y = 10z - 10 - 3z + 5 = 7z - 5, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = -1 + 7t, \\ z = 5t. \end{cases}$$
Quindi la retta s ha vettore direttore $v_s = (3, 7, 5)$, che è multiplo di v_r, perciò le rette r ed s sono parallele. Un punto di r è $(2, 3, -1)$ che non soddisfa la prima equazione di s perché
$$4 \cdot 2 - 3 - (-1) + 3 = 9 \neq 0,$$
quindi si conclude che le rette r ed s sono parallele e disgiunte.

Punto (ii). Due rette parallele sono complanari, cioè esiste un piano che contiene sia r che s. Il fascio di piani contenenti la retta s ha equazione cartesiana
$$\lambda(4x - y - z + 3) + \mu(x + y - 2z + 2) = 0$$
con λ e μ non entrambi nulli. Imponendo il passaggio per il punto $(2, 3, -1)$ di r si trova
$$9\lambda + 9\mu = 0$$
cioè $\mu = -\lambda$. Posto $\lambda = 1$, ne segue che $\mu = -1$ e il piano cercato ha equazione cartesiana
$$3x - 2y + z + 1 = 0.$$

Punto (iii). Il piano ortogonale ad s e passante per il punto $A = (-2, 1, -1)$ ha equazione cartesiana
$$3(x + 2) + 7(y - 1) + 5(z + 1) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad 3x + 7y + 5z + 4 = 0.$$
Posto $y = t$ e $z = s$, si trovano equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3} - \dfrac{7}{3}t - \dfrac{5}{3}s, \\ y = -t, \\ z = s. \end{cases}$$

Punto (iv). Scegliamo il punto $B = (-1, -1, 0)$ della retta s. Il piano ortogonale alla retta s e passante per B ha equazione cartesiana
$$3(x + 1) + 7(y + 1) + 5z = 0 \qquad \text{cioè} \qquad 3x + 7y + 5z + 10 = 0.$$
Calcoliamo l'intersezione di tale piano con la retta r:
$$3(2 - 3t) + 7(3 - 7t) + 5(-1 - 5t) + 10 = 0$$
da cui si ricava
$$32 - 83t = 0, \qquad \text{cioè} \qquad t = \frac{32}{83},$$

quindi il punto cercato C ha coordinate

$$\left(2 - 3\,\frac{32}{83}\,, 3 - 7\,\frac{32}{83}\,, -1 - 5\,\frac{32}{83}\right) = \left(\frac{70}{83}\,, \frac{25}{83}\,, -\frac{243}{83}\right).$$

Soluzione dell'esercizio 2

Punto (i). Le due equazioni che definiscono V sono evidentemente linearmente indipendenti, quindi V è un sottospazio vettoriale di dimensione $4 - 2 = 2$. Risolvendo il sistema lineare, troviamo

$$\begin{cases} x - 2y + z + 2w = 0, \\ 2x - y + 2z - w = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z + 2w = 0, \\ 3y - 5w = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = -3z + 4w, \\ 3y = 5w. \end{cases}$$

Ponendo $z = 0$ e $w = 3$, si trova la soluzione $(4, 5, 0, 3)$, mentre ponendo $z = 1$ e $w = 0$ si trova la soluzione $(-1, 0, 1, 0)$. Quindi una base di V è

$$\{(-1, 0, 1, 0), (4, 5, 0, 3)\}$$

da cui possiamo ricavare prima una base ortogonale di V:

$$v_1 = (-1, 0, 1, 0),$$
$$v_2 = (4, 5, 0, 3) - \frac{-4}{2}(-1, 0, 1, 0) = (4, 5, 0, 3) + 2(-1, 0, 1, 0) = (2, 5, 2, 3),$$

e poi una base ortonormale di V:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{42}}(2, 5, 2, 3)\right\}$$

Punto (ii). Il complemento ortogonale $V^\perp$ di V ha dimensione $4-2 = 2$. La definizione di V ci dice che una base di $V^\perp$ è

$$\{(1, -2, 1, 2), (2, -1, 2, -1)\}$$

mentre equazioni cartesiane di $V^\perp$ sono

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ 4x + 5y + 3w = 0. \end{cases}$$

Punto (iii). Una base ortogonale di $V^\perp$ è formata dai vettori

$$v_1 = (1, -2, 1, 2),$$
$$v_2 = (2, -1, 2, -1) - \frac{4}{10}(1, -2, 1, 2) = \left(\frac{8}{5}\,, -\frac{1}{5}\,, \frac{8}{5}\,, -\frac{9}{5}\right),$$

da cui segue che una base ortonormale di $V^\perp$ è

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1, -2, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{210}}(8, -1, 8, -9)\right\},$$

quindi una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che completa la base ortonormale di V è

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{42}}(2, 5, 2, 3), \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -2, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{210}}(8, -1, 8, -9)\right\}.$$

Punto (iv). La proiezione ortogonale del vettore $u = (1, -1, 0, 1)$ su V è

$$u_1 = -\frac{1}{2}(-1, 0, 1, 0) + \frac{0}{42}(2, 5, 2, 3) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

quindi la proiezione ortogonale del vettore u su $V^\perp$ è

$$u_2 = u - u_1 = (1, -1, 0, 1) - \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Soluzione dell'esercizio 3

La matrice completa del sistema lineare è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2k & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2k & -1 \\ 1 & k & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1-2k & -2 \\ 0 & k+2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per $k = -2$, si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e il teorema di Rouché-Capelli implica che l'insieme di soluzioni è una retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1, \\ 3y + 5z = -2, \end{cases}$$

da cui si ricavano equazioni parametriche ponendo per esempio $z = 3t$:

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{4}{3} - 10t + 3t = -\frac{1}{3} - 7t, \\ y = -\frac{2}{3} - 5t, \\ z = 3t, \end{cases}$$

cioè l'insieme delle soluzioni è $(-1/3, -2/3, 0) + \ll (7, 5, -3) \gg$.

Se $k \neq -2$, continuiamo la riduzione a gradini:

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1-2k & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2k & -2 \end{array}\right)$$

quindi se $k = 1/2$, il sistema lineare non ha soluzione per il teorema di Rouché-Capelli. Si conclude che, se $k \neq -2, 1/2$, il sistema ha una e una sola soluzione per il teorema di Rouché-Capelli. Dalla terza equazione si trova

$$z = \frac{2}{2k - 1}$$

mentre dalla seconda equazione si trova $y = 0$ e dalla prima equazione si trova

$$x = 1 + 2y + z = 1 + \frac{2}{2k - 1} = \frac{2k + 1}{2k - 1},$$

cioè la soluzione è

$$\left(\frac{2k + 1}{2k - 1}, 0, \frac{2}{2k - 1}\right).$$

Soluzione dell'esercizio 4

Punto (i). Si ha che

$$
\begin{aligned}
&T_k(x_1, y_1, z_1) + T_k(x_2, y_2, z_2) = \\
&= (2x_1 - ky_1, y_1 - 2x_1 - z_1, 2y_1 + kz_1) + (2x_2 - ky_2, y_2 - 2x_2 - z_2, 2y_2 + kz_2) = \\
&= (2x_1 - ky_1 + 2x_2 - ky_2, y_1 - 2x_1 - z_1 + y_2 - 2x_2 - z_2, 2y_1 + kz_1 + 2y_2 + kz_2) = \\
&= (2(x_1 + x_2) - k(y_1 + y_2), y_1 + y_2 - 2(x_1 + x_2) - z_1 - z_2, 2(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2)) = \\
&= T_k(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)
\end{aligned}
$$

inoltre si ha che

$$
\begin{aligned}
&T_k(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x - k\alpha y, \alpha y - 2\alpha x - \alpha z, 2\alpha y + k\alpha z) = \\
&= \alpha(2x - ky, y - 2x - z, 2y + kz) = \alpha T_k(x, y, z)
\end{aligned}
$$

quindi l'applicazione T_k è lineare e la matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$
A_k = \begin{pmatrix} 2 & -k & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}
$$

Punto (ii). L'applicazione lineare T_k è invertibile se e solo se la matrice A_k è invertibile, il che accade se e solo se il determinante di A_k è diverso da zero. Calcoliamo il determinante di A_k:

$$
\det(A_k) = 2k + 4 - 2k^2 = -2(k^2 - k - 2) = -2(k + 1)(k - 2)
$$

quindi T_k è invertibile se e solo se $k \neq -1, 2$.

Per $k = 0$, la matrice A_0 associata a T_0 è

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}
$$

di cui calcoliamo l'inversa:

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1/2 \end{array}\right)
$$

cioè la matrice inversa è

$$
\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}
$$

da cui segue che l'applicazione lineare $(T_0)^{-1}$, inversa di T_0, è

$$
(T_0)^{-1}(x, y, z) = (x/2, z/2, -x - y + z/2).
$$

Punto (iii). Per $k = -1$, la matrice A_{-1} è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome il rango della matrice è 2, si ha che l'immagine di T_{-1} ha dimensione 2 e una base è formata per esempio dai vettori $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, che sono rispettivamente la prima colonna diviso 2 e la terza colonna moltiplicata per -1. Quindi equazioni parametriche dell'immagine di T_{-1} sono

$$\begin{cases} x = t, \\ y = s - t, \\ z = s, \end{cases}$$

dove t, s sono i due parametri, da cui si ricava l'equazione cartesiana eliminando i parametri:

$$x + y - z = 0.$$

Per il teorema della dimensione si ha che la dimensione del nucleo di T_{-1} è $3 - 2 = 1$. Dalla riduzione a gradini della matrice si trovano equazioni cartesiane del nucleo di T_{-1}:

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ 2y - z = 0, \end{cases}$$

da cui si ricavano equazioni parametriche risolvendo il sistema lineare: per esempio, ponendo $y = 2t$, si trova

$$\begin{cases} x = -t, \\ y = 2t, \\ z = 4t, \end{cases}$$

dove t è il parametro, da cui si conclude che una base del nucleo di T_{-1} è formata dal vettore $(-1, 2, 4)$.

Punto (iv). Per $k = 2$, il polinomio caratteristico della matrice A_2 è

$$\begin{aligned} \det(A_2 - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 + 2(2-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3), \end{aligned}$$

quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$, tutti con molteplicità algebrica 1. Si conclude che anche la molteplicità geometrica di tutti e tre gli autovalori è 1 e la matrice è diagonalizzabile. Gli autospazi sono rispettivamente

$$V_0(A_2) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ll (1, 1, -1) \gg,$$

$$V_2(A_2) = \ker(A_2 - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ll (1, 0, -2) \gg,$$

$$V_3(A_2) = \ker(A_3 - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ll (2, -1, -2) \gg .$$