Prova scritta parziale di Geometria per Fisica 23/06/2021
Tempo a disposizione: 2 ore

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri la funzione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\phi(x, y, z) = (x + 3y, x - y, y + z).$$

(a) Calcolare la matrice A di ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Calcolare gli autovalori di ϕ e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(c) Dire se ϕ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, calcolare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di ϕ.

Esercizio 2. (7 punti) Nello spazio euclideo si considerino i seguenti punti:

$$O = (0, 0, 0), A = (0, 1, -1), B = (1, 0, -1), C = (1, 1, 0).$$

(a) Calcolare l'equazione del piano π determinato dai punti A, B, C.
(b) Calcolare l'equazione del piano π' che passa per O e per A ed è ortogonale al piano π.
(c) Calcolare la distanza dal punto C al piano π'.

Esercizio 3. (9 punti) In $\mathbb{R}^4$, con il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio vettoriale W generato dai vettori

$$v_1 = (-1, 1, 1, 1), \qquad v_2 = (0, 1, 0, 1).$$

(a) Calcolare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di W.
(b) Completare $\mathcal{B}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.
(c) Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $u = (1, 0, 1, 1)$ su W.

Esercizio 4. (6 punti)

(a) Dare la definizione di matrici congruenti.
(b) Dimostrare che una matrice è congruente a se stessa (cioè la relazione di congruenza tra matrici è riflessiva).
(c) Dimostrare che se una matrice A è congruente ad un altra matrice B, allora anche B è congruente ad A (cioè la relazione di congruenza è simmetrica).
(d) Dimostrare che se una matrice A è congruente ad una matrice B, e B è congruente ad una matrice C, allora A è congruente a C (cioè la relazione di congruenza è transitiva).

Soluzioni

Esercizio 1. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (b) Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$, tutti e tre di molteplicità algebrica e geometrica 1. (c) ϕ è diagonalizzabile, $\{(0,0,1),(3,1,1),(3,-3,1)\}$.

Esercizio 2. (a) $x + y - z - 2 = 0$. (b) $y + z = 0$. (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 3. (a) $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0) \right\}$.
(b) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1) \right\}$.
(c) $(0, 1/2, 0, 1/2)$.

Esercizio 4. (a) Due matrici A e B sono congruenti se esiste una matrice invertibile M tale che $B = M^T A M$.
(b) $A = I^T A I$, dove I è la matrice identità .
(c) Se $B = M^T A M$, allora $A = (M^{-1})^T B (M^{-1})$.
(d) Se $B = M^T A M$ e $C = N^T B N$, allora $C = (MN)^T A (MN)$.