Testo e soluzioni della seconda prova parziale di Geometria per Fisica
09/06/2021

Esercizio 1. (18 punti) Sia $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare

$$F(x, y, z) = (-6x + 4y - z, -4x - 2z, 8x - 4y + 2z).$$

(a) Determinare la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare la dimensione e una base del nucleo di F e la dimensione e una base dell'immagine di F.
(c) Determinare gli autovalori di F e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(d) Determinare se F è diagonalizzabile e calcolare tutti gli autovettori di F.
(e) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{C} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e viceversa.
(f) Determinare la matrice B che rappresenta F rispetto alla base $\mathcal{C}$.

Esercizio 2. (6 punti) Consideriamo le seguenti due rette sghembe r ed s dello spazio euclideo (con il prodotto scalare standard):

$$r\colon \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ 2z - y + 1 = 0 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

(a) Calcolare la distanza tra r ed s.
(b) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta ortogonale ed incidente sia a r che a s.

Esercizio 3. (5 punti)
(a) Determinare la forma bilineare b polare della forma quadratica

$$q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - 4yz + 3z^2$$

(b) Determinare la matrice di b rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(c) Determinare la segnatura di q con il metodo di Lagrange.

Esercizio 4. (6 punti)
Si dice che una matrice quadrata N è nilpotente se esiste un numero intero positivo k tale che N^k è uguale alla matrice nulla. In particolare la matrice nulla è nilpotente (con $k = 1$).
(a) Dimostrare che non ci sono matrici non nulle che sono simili alla matrice nulla, cioè la matrice nulla è simile solo a se stessa.
(b) Siano A e B matrici quadrate simili. Dimostrare che le matrici A^k e B^k sono ancora simili, per ogni intero positivo k.
(c) Dimostrare che se λ è autovalore di N, allora λ^k è autovalore di N^k, per ogni intero positivo k.
(d) Dedurre che una matrice nilpotente non nulla ha solo l'autovalore 0 e non è diagonalizzabile.

Soluzioni

Esercizio 1. (a)

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Il nucleo di F ha dimensione 1 e una sua base è per esempio $\{(1,1,-2)\}$. L'immagine di F ha dimensione 2 e una sua base è per esempio $\{(1,0,-1),(1,2,-2)\}$.

(c) Gli autovalori di F sono $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica e geometrica 1 e $\lambda_2 = -2$ con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

(d) F quindi non è diagonalizzabile. Gli autovettori di F sono $(1,1,-2)$, e tutti i suoi multipli non nulli, e $(3,2,-4)$, e tutti i suoi multipli non nulli.

(e) Le matrici di cambiamento di base sono

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(f) La matrice B è

$$B = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -15 \\ -2 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. (a) La distanza tra le due rette è $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

(b) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta cercata sono per esempio

$$\begin{cases} x = 27/10, \\ y = 8/5 + t, \\ z = 3/10 - 2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 27/10, \\ 4y + 2z = 7. \end{cases}$$

Esercizio 3. (a) La forma bilineare b è

$$b((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 - x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

(b) La matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) La segnatura di q è $(2,1)$.

Esercizio 4. (a) La matrice A è simile alla matrice nulla 0 se esiste una matrice invertibile M tale che $A = M^{-1}0M = 0M = 0$, cioè anche A è nulla.

(b) Se la matrice A è simile alla matrice B, allora esiste una matrice invertibile M tale che $A = M^{-1}BM$. Quindi

$$A^2 = A \cdot A = (M^{-1}BM)(M^{-1}BM) = M^{-1}B(MM^{-1})BM = M^{-1}B^2M$$

cioè A^2 e B^2 sono simili. Per induzione su k, supponiamo che A^{k-1} e B^{k-1} siano simili, cioè $A^{k-1} = M^{-1}B^{k-1}M$, allora

$$A^k = A \cdot A^{k-1} = (M^{-1}BM)(M^{-1}B^{k-1}M) = M^{-1}B(MM^{-1})B^{k-1}M = M^{-1}B^kM$$

cioè A^k e B^k sono simili.

(c) Se λ è autovalore di N, esiste un vettore non nullo v tale che $Nv = \lambda v$. Quindi

$$N^2v = NNv = N\lambda v = \lambda Nv = \lambda\lambda v = \lambda^2 v,$$

cioè λ^2 è autovalore di N^2. Per induzione su k, supponiamo che sia $N^{k-1}v = \lambda^{k-1}v$. Allora ne segue che

$$N^kv = NN^{k-1}v = N\lambda^{k-1}v = \lambda^{k-1}Nv = \lambda^{k-1}\lambda v = \lambda^k v,$$

cioè λ^k è autovalore di N^k.

(d) Se λ è autovalore di una matrice nilpotente N, cioè supponiamo che N^k sia uguale alla matrice nulla per un certo intero positivo k, allora, per la parte (c) appena dimostrata, λ^k deve essere autovalore della matrice nulla, cioè deve essere 0. Ma allora anche λ è uguale a 0. Quindi, se N fosse diagonalizzabile, dovrebbe essere simile alla matrice nulla. Per il punto (a), ciò non è possibile se N è non nulla.