ESERCIZIO CON R-STATISTICS su SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

Data una funzione periodica $f(t)$ di periodo T $\quad [\ f(t+T) = f(t)\ ]$

$f(t)$ si può esprimere con lo sviluppo in serie di Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

dove $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ pulsazione dell'armonica fondamentale.

n : identifica l'armonica di ordine n

$n = 1$ è l'armonica fondamentale che corrisponde alla frequenza di ripetizione della funzione periodica $f(t)$.

I coefficienti a_0, a_n, b_n sono definiti come segue.

- $$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$ VALOR MEDIO di $f(t)$ (sul periodo)

- $$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

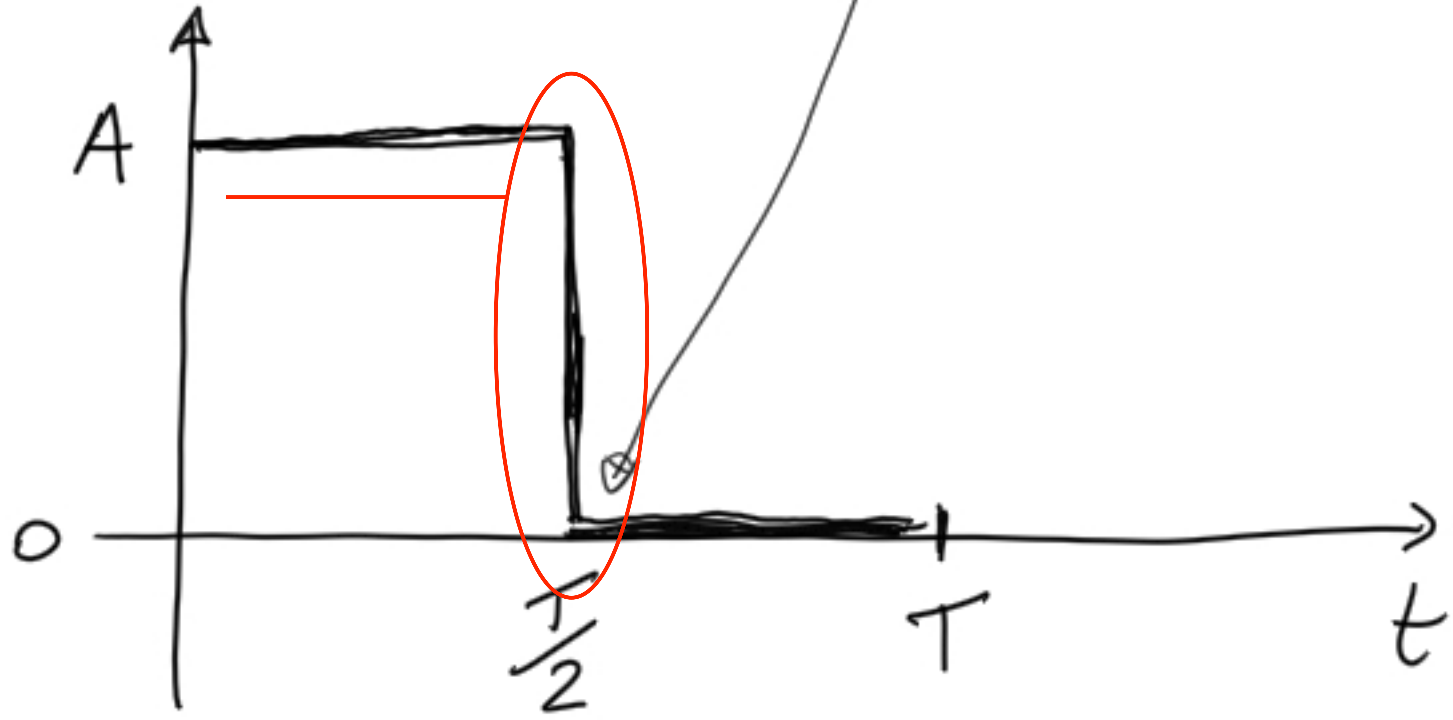
- $$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

(gli integrali sono intesi sul periodo, quindi si può scegliere anche $\int_{-T/2}^{T/2}$)

Esempio con un'onda quadra come visto in elettronica digitale.

→ ONDA QUADRA

con ampiezza A
duty cycle 50%
offset $+\frac{A}{2}$ → significa che è traslata in alto, $f(t) \geq 0 \ \forall t$.
periodo T



$$f(t) = \begin{cases} A & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{per } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

$t = \frac{T}{2}$ punto di discontinuità, ma la funzione è integrabile.

CALCOLIAMO I COEFFICIENTI DELLA SERIE DI FOURIER

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} A\,dt + \cancel{\int_{T/2}^{T} 0\,dt}\right] =$$

$$= \frac{A \cdot T}{T \cdot 2} = \frac{A}{2}$$ che corrisponde all'offset componente continua.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} A\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{2A}{T}\int_0^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\,dt$$

(si può concludere che ogni $a_n = 0$, perché, per esempio:
per $n=1$ stiamo facendo l'integrale sul semiperiodo del cos, il quale risulta $\underline{=0}$
stesso discorso per $n>1$.)

eseguiamo comunque l'integrale.

$\longrightarrow$ cambio di variabili $\quad \underline{x = n\omega_0 t}$

$\Rightarrow \quad \underline{t = \frac{x}{n\omega_0}} \quad \Rightarrow \quad \underline{dt = \frac{dx}{n\omega_0}}$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{2A}{T n\omega_0}\int_0^{\underline{n\omega_0} T/2} \cos(x)\,dx = \frac{\cancel{2}A\cancel{T}}{\cancel{T}n\cancel{2}\pi}\Big[\sin(x)\Big]_0^{n\omega_0\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{A}{n\pi}\sin\left(n\omega_0\frac{T}{2}\right) = \frac{A}{n\pi}\sin\left(n\frac{2\pi\cancel{T}}{\cancel{T}\,2}\right)$$

$$= \underline{\frac{A}{n\pi}\sin(n\pi) = 0 \quad \forall n}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} A \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt$$

cambio di variabile

$$x = n\omega_0 t$$

$$t = \frac{x}{n\omega_0} \Rightarrow dt = \frac{dx}{n\omega_0}$$

$$= \frac{2A}{T n\omega_0}\int_0^{n\omega_0 \frac{T}{2}} \sin(x)\,dx = \frac{A}{n\pi}\Big[-\cos(x)\Big]_0^{n\omega_0 \frac{T}{2}}$$

$$= \frac{A}{n\pi}\Big[-\cos(x)\Big]_0^{n\pi} = \frac{A}{n\pi}\Big[-\cos(n\pi) + 1\Big]$$

$$= \frac{A}{n\pi}\Big(1 - \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{A}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

n	
1	$b_1 \neq 0$
2	$b_2 = 0$
$\vdots$	$\vdots$

Rimangono solo le armoniche di ordine dispari.

$$\Longrightarrow$$

Riepilogando

$$a_0 = \frac{A}{2} \qquad a_n = 0 \quad \forall n$$

$$b_n = \frac{A}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f_s(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) \cdot \sin(n\omega_0 t)}$$

impostiamo questo sviluppo con R-statistics e vediamo come $f_s(t)$ si avvicina alla $f(t)$ all'aumentare delle armoniche prese in considerazione.