

Corso di Laurea in Informatica – Università di Ferrara
Istituzioni di Matematica, secondo modulo
Prima prova parziale A.A. 2013–2014 – 06/05/2014

1) Calcolare la derivata della seguente funzione, esplicitando tutti i passaggi:

$$f(x) = \ln\left(2x^3 - \sqrt[3]{1 + \cot(2x)}\right)$$

2) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^6(x) - 1}{x \ln(1 + \sin(x))}$$

3) Studiare la seguente funzione analizzandone crescita e decrescita, fino a tracciarne il grafico:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3}}$$

Parte opzionale: determinare convessità e concavità di $f(x)$ analizzando $f''(x)$.

4) Calcolare i seguenti integrali, esplicitando tutti i passaggi:

$$(a) \int_2^7 \frac{1}{x + \sqrt{2+x}} dx \qquad (b) \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)} dx$$

Soluzioni e commenti

Per quanto possibile, nelle soluzioni seguenti vengono evidenziati tutti gli aspetti rilevanti e le possibili alternative per raggiungere il risultato. Osservazioni e commenti sono inseriti per chiarire ogni dettaglio delle scelte e dei passaggi. Nello svolgimento del compito, naturalmente, gran parte delle osservazioni qui riportate possono essere omesse, così come alcuni passaggi.

Esercizio 1

La funzione $f(x)$ è derivabile come composta di funzioni derivabili. Si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{2x^3 - \sqrt[3]{1 + \cot(2x)}} \left(6x^2 + \frac{2}{3} (1 + \cot(2x))^{-2/3} \left(1 + (\cot(2x))^2 \right) \right) \quad (1)$$

dove la derivata della funzione $\cot(t)$ può essere espressa in diversi modi equivalenti:

$$\frac{d}{dt} \cot(t) = -\frac{1}{(\sin(t))^2} = -(\operatorname{cosec}(t))^2 = -\left(1 + (\cot(t))^2\right).$$

Ulteriori passaggi di sviluppo dell'espressione (1) possono essere eventualmente compiuti:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2x^3 - \sqrt[3]{1 + \cot(2x)}} \cdot \frac{18x^2 \sqrt[3]{(1 + \cot(2x))^2} + 2 \left(1 + (\cot(2x))^2\right)}{3 \sqrt[3]{(1 + \cot(2x))^2}} \\ &= \frac{18x^2 \sqrt[3]{(1 + \cot(2x))^2} + 2 \left(1 + (\cot(2x))^2\right)}{3 \left(2x^3 - \sqrt[3]{1 + \cot(2x)}\right) \sqrt[3]{(1 + \cot(2x))^2}} \end{aligned}$$

Altre espressioni si possono eventualmente raggiungere usando le forme equivalenti della derivata di $\cot(t)$.

N.B. Nel caso in cui si sia sviluppata la derivata della funzione in cui al posto di $\cot(2x)$ compare $\cos(2x)$, la formula risultante è molto simile a quella in (1):

$$f'(x) = \frac{1}{2x^3 - \sqrt[3]{1 + \cos(2x)}} \left(6x^2 + \frac{2}{3}(1 + \cos(2x))^{-2/3} \sin(2x) \right)$$

in cui analoghi ulteriori passaggi possono eventualmente essere compiuti, utilizzando in questo caso le espressioni equivalenti $\cos(2x) = 2(\cos(x))^2 - 1 = 1 - 2(\sin(x))^2$. Ad esempio, essendo $1 + \cos(2x) = 2(\cos(x))^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2x^3 - \sqrt[3]{2(\cos(x))^2}} \left(6x^2 + \frac{2}{3} \left(2(\cos(x))^2 \right)^{-2/3} \sin(2x) \right) \\ &= \frac{18x^2 \cos(x) \sqrt[3]{4 \cos(x)} + 4 \sin(x) \cos(x)}{3 \left(2x^3 - \sqrt[3]{2(\cos(x))^2} \right) \sqrt[3]{4 \cos(x)} \cos(x)} \end{aligned}$$

Esercizio 2

Il limite è nella forma indeterminata $0/0$. Considerando la frazione argomento del limite, si può vedere il numeratore come la differenza di due quadrati: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ con $a = (\cos(x))^3$ e $b = 1$. Si ha:

$$(\cos(x))^6 - 1 = \left((\cos(x))^3 - 1 \right) \left((\cos(x))^3 + 1 \right) = (\cos(x) - 1) \left((\cos(x))^2 + \cos(x) + 1 \right) \left((\cos(x))^3 + 1 \right)$$

dove si è ulteriormente sviluppato il fattore $(\cos(x))^3 - 1$ come la differenza di due cubi: $c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + cd + d^2)$ con $c = \cos(x)$ e $d = 1$. Ora, poichè per $x \rightarrow 0$ è $(\cos(x))^2 + \cos(x) + 1 \rightarrow 3$ e $(\cos(x))^3 + 1 \rightarrow 2$, il limite dato dipende dal limite del rapporto $\frac{\cos(x) - 1}{x \ln(1 + \sin(x))}$. Applicando a questo rapporto due volte la regola di De l'Hôpital si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \ln(1 + \sin(x))} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\ln(1 + \sin(x)) + x \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} + \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} + x \frac{\sin(x)(1 + \sin(x)) - (\cos(x))^2}{(1 + \sin(x))^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{\frac{2 \cos(x)}{1 + \sin(x)} + x \left(\frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} - \left(\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} \right)^2 \right)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

perchè $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x)}{1 + \sin(x)} = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} - \left(\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} \right)^2 \right) = 0$. Se ne conclude che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^6(x) - 1}{x \ln(1 + \sin(x))} = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = -3.$$

Si possono seguire anche altre strade alternative. Ad esempio, inizialmente il numeratore può essere visto anche come la differenza di due cubi: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ con $a = (\cos(x))^2$ e $b = 1$, ottenendo

$$\begin{aligned} (\cos(x))^6 - 1 &= \left((\cos(x))^2 - 1 \right) \left(\left((\cos(x))^2 \right)^2 + (\cos(x))^2 + 1 \right) \\ &= \left((\cos(x))^2 - 1 \right) \left((\cos(x))^4 + (\cos(x))^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

per poi sviluppare ulteriormente $(\cos(x))^2 - 1$ come la differenza di due quadrati $c^2 - d^2 = (c - d)(c + d)$ con $c = \cos(x)$ e $d = 1$, ottenendo infine

$$(\cos(x))^6 - 1 = (\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)((\cos(x))^4 + (\cos(x))^2 + 1)$$

che porta esattamente alla stessa conclusione di prima, essendo chiaramente $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) + 1 = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^4 + (\cos(x))^2 + 1 = 3$.

Un'ulteriore possibilità è applicare al numeratore direttamente la formula generale per la differenza di due potenze intere positive: $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \left(\sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \right)$, con $a = \cos(x)$, $b = 1$ e $n = 5$. In questo caso, negli addendi della sommatoria compaiono solo le potenze positive intere $(\cos(x))^m$ con $m = 5, \dots, 0$, che hanno tutte limite uguale a 1 per $x \rightarrow 0$. Quindi, poichè ci sono sei addendi nella sommatoria, si ha ancora $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{m=0}^5 (\cos(x))^m = 6$ e ci si riconduce esattamente al caso analizzato.

Infine, non volendo preventivamente sviluppare il numeratore, si può applicare la regola di De l'Hôpital direttamente all'argomento del limite. In questo caso, dopo la prima derivazione il numeratore della frazione diventa $6(\cos(x))^5(-\sin(x))$ e al secondo passo il numeratore diventa $30(\cos(x))^4(\sin(x))^2 - 6(\cos(x))^6$ che per $x \rightarrow 0$ ha limite -6 .

Esercizio 3

La funzione è definita se $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ e se il radicando è non negativo. Dato che

$$\begin{array}{l}
 x^2 - 2x = x(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ o } x \geq 2 \\
 x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ o } x > 3
 \end{array}$$

la funzione è definita in $D =]-\infty, 0] \cup]1, 2] \cup]3, +\infty[$. Essendo una radice quadrata, la funzione è non negativa in tutto il suo dominio di definizione, cioè $f(x) \geq 0 \forall x \in D$. Per $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$ è $f(0) = 0 = f(2)$. Dato che $x_3 = 1$ e $x_4 = 3$ sono radici del denominatore si ha:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^2(1 - 2/x)}{x^2(1 - 4/x + 3/x^2)}} = 1 \\
 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x(x - 2)}{(x - 3)(x - 1)}} = +\infty \\
 \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{\frac{x(x - 2)}{(x - 3)(x - 1)}} = +\infty
 \end{aligned}$$

e quindi le rette di equazione $x = 1$ e $x = 3$ sono asintoti verticali per $f(x)$, mentre la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale. Inoltre, si nota che

$$x^2 - 2x > x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > 3/2.$$

Pertanto, quando $x > 3/2$ il valore del radicando è strettamente maggiore di 1, mentre quando $x < 3/2$ il radicando è strettamente minore di uno. Pertanto, quando x tende a $+\infty$ la funzione tende a 1, ma assumendo valori strettamente maggiori di 1, mentre quando x tende a $-\infty$ essa tende a 1, ma assumendo valori strettamente minori di 1. Abbiamo cioè che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1^+$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^-$. Non si hanno asintoti obliqui perchè $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = 0$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} \right)^{-1/2} \frac{2(x-1)(x^2 - 4x + 3) - 2(x^2 - 2x)(x-2)}{(x^2 - 4x + 3)^2} \\
 &= \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} \right)^{1/2} \frac{(x-1)^2(x-3) - x(x-2)^2}{(x-3)^2(x-1)^2} \\
 &= \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} \right)^{1/2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 3x^2 + 6x - 3 - x^3 + 4x^2 - 4x}{(x-3)^2(x-1)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{(x-3)(x-1)}{x(x-2)}} \cdot \frac{-x^2 + 3x - 3}{(x-3)^2(x-1)^2} \tag{2}
 \end{aligned}$$

Poichè il primo fattore, dove esiste, è non negativo (perchè è una radice quadrata) e il denominatore del secondo fattore è sempre positivo nel dominio di $f(x)$, ne discende che il segno della derivata prima dipende solo dal segno del numeratore del secondo fattore, cioè dal segno di $-x^2 + 3x - 3$. Questo trinomio ha discriminante $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$ e quindi è sempre negativo (ovunque concorde con il segno del termine di grado massimo, che è -1). Pertanto, dove esiste, $f'(x) < 0$ e quindi $f(x)$ è ivi decrescente e, inoltre, non ci sono punti **interni** al dominio di definizione che siano punti di massimo o di minimo relativo o assoluto, e nemmeno punti di flesso con tangente parallela all'asse delle ascisse ("orizzontale"). Punti di massimo e minimo possono tuttavia trovarsi agli estremi del dominio e infatti, essendo $f(x) \geq 0$ nel proprio campo di esistenza, $x = 0$ e $x = 2$ sono punti di minimo assoluto, in cui $f(x) = 0$. Inoltre, non è esclusa la presenza di punti di flesso con tangente obliqua o parallela all'asse delle ordinate ("verticale").

Occorre però osservare che il dominio di $f'(x)$ non coincide completamente con il dominio di $f(x)$: infatti, il radicando in (2) non esiste in $x = 0$ e in $x = 2$ (che pure sono punti del dominio di $f(x)$) perchè in questi punti si annulla il denominatore. Pertanto il dominio di $f'(x)$ è $] -\infty, 0[\cup]1, 2[\cup]3, +\infty[$. Si deve allora calcolare il limite di $f'(x)$ in tali punti, per capire con quale tipo di andamento la funzione "arriva" a zero in $x = 0$ e in $x = 2$. A questo scopo, si osserva che, per le condizioni di esistenza di $f(x)$ imposte all'inizio, il radicando è sempre positivo in $] -\infty, 0[$ e in $]1, 2[$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-3)(x-1)}{x(x-2)} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-3)(x-1)}{x(x-2)}.$$

D'altra parte, come si è già detto, il segno dell'ultima frazione in (2) è sempre negativo, quindi si conclude immediatamente che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x).$$

Pertanto, per $x \rightarrow 0^-$ e $x \rightarrow 2^-$ la tangente alla funzione tende a diventare parallela all'asse delle ordinate ("verticale"), con coefficiente angolare che tende a $-\infty$.

A questo punto si potrebbe già abbozzare un grafico dell'andamento qualitativo di $f(x)$. Tuttavia, anche senza l'ausilio delle informazioni sulla derivata seconda, si può ottenere un grafico più accurato considerando le seguenti osservazioni.

Osservazioni. Si può controllare il comportamento di $f'(x)$ anche negli altri estremi del dominio. Dato che per $x < 0$ e per $x > 3$ si ha $(x-3)(x-1) > 0$ e anche $x(x-2) > 0$, possiamo scrivere¹

$$\sqrt{(x-3)(x-1)/(x(x-2))} = \sqrt{(x-3)(x-1)} / \sqrt{x(x-2)}. \tag{3}$$

Discende allora da (2) che in $] -\infty, 0[\cup]3, +\infty[$ si ha

$$f'(x) = \frac{((x-3)(x-1))^{1/2}}{\sqrt{x(x-2)}} \cdot \frac{-x^2 + 3x - 3}{((x-3)(x-1))^2} = \frac{1}{\sqrt{x(x-2)}} \cdot \frac{-x^2 + 3x - 3}{((x-3)(x-1))^{3/2}} \tag{4}$$

da cui si ottiene immediatamente che

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = -\infty$$

¹Ricordiamo infatti che se $a, b > 0$ allora $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$, ma se $a, b < 0$ allora $\sqrt{a/b}$ è ancora definita, perchè $a/b > 0$, mentre \sqrt{a} e \sqrt{b} non esistono in \mathbb{R} , quindi in questo caso **non è vero che** $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$. Un ragionamento analogo vale per $\sqrt{a \cdot b}$.

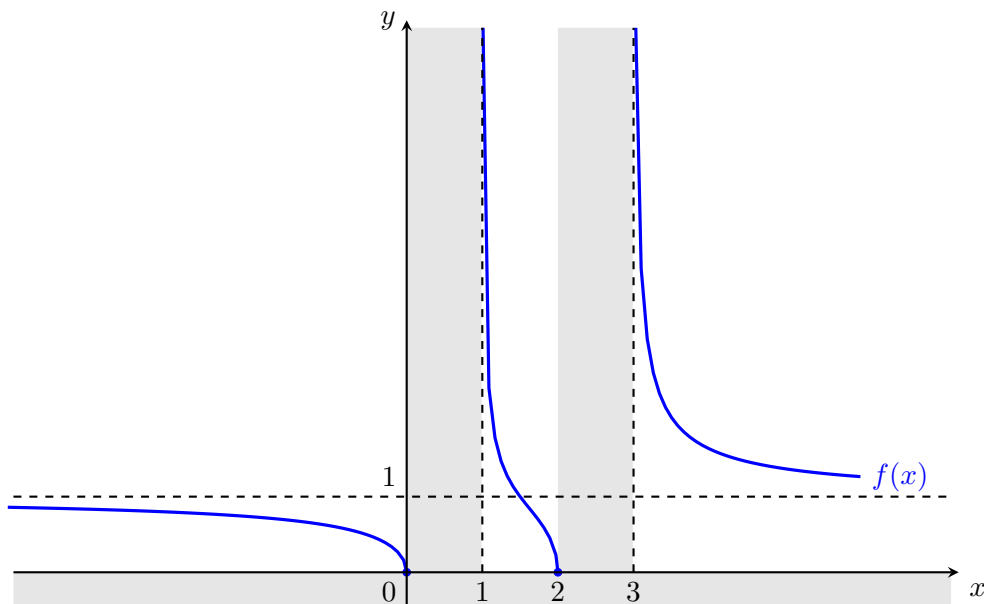


Figura 1: grafico qualitativo della funzione dell'esercizio 3. Le zone ombreggiate rappresentano le regioni del piano dove la funzione non esiste.

cioè che la tangente ad $f(x)$ tende a diventare "verticale" per $x \rightarrow 3^+$, con coefficiente angolare negativo. Questo conferma il fatto che la retta $x = 3$ sia asintoto verticale per $f(x)$.

Inoltre, dato che da (4) si ha anche²

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2(1-2/x)}} \cdot \frac{-x^2(1-3/x+3/x^2)}{(x^2(1-3/x)(1-1/x))^{3/2}} = \frac{1}{|x|\sqrt{1-2/x}} \cdot \frac{-x^2(1-3/x+3/x^2)}{|x|^3((1-3/x)(1-1/x))^{3/2}} \\ &= \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1-3/x+3/x^2}{\sqrt{1-2/x}((1-3/x)(1-1/x))^{3/2}}, \end{aligned}$$

si vede immediatamente che per $x \rightarrow \pm\infty$ la derivata prima tende a zero (perchè l'ultima frazione tende a 1), mantenendo sempre segno negativo. In conclusione, questo mostra che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0^-$$

cioè che per $x \rightarrow \pm\infty$ la tangente ad $f(x)$ tende a diventare parallela all'asse delle ascisse (mantenendo comunque valori negativi), il che conferma il fatto che la retta $y = 1$ sia asintoto orizzontale per $f(x)$.

Infine, per $x \in]1, 2[$ si ha $(x-3)(x-1) < 0$ e anche $x(x-2) < 0$, dunque l'**uguaglianza (3) non vale**. Tuttavia, poichè $(x-3)^2(x-1)^2 > 0 \forall x \in]1, 2[$, possiamo riscrivere (2) come

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\frac{(x-3)(x-1)}{x(x-2)} \cdot \frac{1}{(x-3)^4(x-1)^4}} \cdot (-x^2+3x-3) \\ &= \sqrt{\frac{1}{x(x-2)(x-3)^3(x-1)^3}} \cdot (-x^2+3x-3) \end{aligned} \quad (5)$$

da cui si vede immediatamente che il radicando tende a $+\infty$ per $x \rightarrow 1^+$, ma anche per $x \rightarrow 2^-$ (cosa che era già stata determinata), ossia abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x).$$

Ne discende che, sia per $x \rightarrow 1^+$ che per $x \rightarrow 2^-$, la retta tangente alla funzione tende a diventare parallela all'asse delle ordinate ("verticale") con coefficiente angolare negativo. Questo conferma che $x = 1$ è asintoto verticale per $f(x)$ (perchè $f(x)$ diverge a $+\infty$ per $x \rightarrow 1^+$). D'altra parte, il fatto che $f'(x)$ sia continua

²Ricordiamo che $|x| = \operatorname{sgn}(x)x$, quindi $|x|^k = x^k$ per k pari e $|x|^k = -x^k$ per k dispari.

ed il fatto che essa abbia tangente “verticale” sia per $x \rightarrow 1^+$ che per $x = 2$, consentono di dedurre con considerazioni geometriche che nell’intervallo $]1, 2[$ è presente un punto di flesso di $f(x)$ il quale, essendo $f'(x) < 0$ ovunque, ha tangente obliqua con coefficiente angolare negativo.

Dalle considerazioni precedenti è dunque possibile dedurre il grafico abbastanza accurato del comportamento qualitativo di $f(x)$ mostrato in fig. 1.

Per la soluzione della parte opzionale si vada al termine della correzione.

Esercizio 4a

Per il primo integrale si pone $t = \sqrt{2+x}$ da cui, essendo $x > 0$, elevando al quadrato si ha $t^2 = 2+x$ e quindi $x = t^2 - 2$ da cui $dx = 2tdt$. Inoltre gli estremi diventano $t = 2$ per $x = 2$ e $t = 3$ per $x = 7$. Ne segue che

$$\int_2^7 \frac{1}{x + \sqrt{2+x}} dx = \int_2^3 \frac{2t}{t^2 + t - 2} dt = 2 \int_2^3 \frac{t}{(t-1)(t+2)} dt$$

La funzione integrando è una funzione razionale con numeratore di primo grado e denominatore di secondo grado con discriminante strettamente positivo (conosciamo infatti le due radici reali $t_1 = -2$ e $t_2 = 1$). Possiamo quindi usare il primo caso del metodo di integrazione per decomposizione:

$$\frac{t}{(t-1)(t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A=1 \\ 2A=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/3 \\ B=2/3 \end{cases}$$

Dunque

$$\begin{aligned} 2 \int_2^3 \frac{2t}{(t-1)(t+2)} dt &= \frac{2}{3} \int_2^3 \frac{1}{t-1} dt + \frac{4}{3} \int_2^3 \frac{1}{t+2} dt = \frac{2}{3} \left(\ln(|t-1|) + 2 \ln(|t+2|) \right) \Big|_2^3 \\ &= \frac{2}{3} (\ln(2) + 2 \ln(5) - \ln(1) - 2 \ln(4)) = \frac{2}{3} \ln \left(\frac{2 \cdot 5^2}{4^2} \right) = \ln \left(\frac{5^{4/3}}{4} \right) \end{aligned}$$

Esercizio 4b

Per il secondo integrale, si può procedere in diversi modi.

- 1) Un primo modo è semplificare la funzione integranda usando la relazione trigonometrica fondamentale $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$\int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{\sin(x)} dx.$$

Ora si effettua la sostituzione $t = \tan(x/2)$, dalla quale discendono subito $x = 2 \arctan(t)$, $\sin(x) = 2t/(1+t^2)$ e $dx = 2dt/(1+t^2)$. Pertanto l’integrale diventa

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} = \ln(|t|) = \ln(|\tan(x/2)|) = \ln \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right). \quad (6)$$

Si osservi che la relazione $\sin(x) = 2t/(1+t^2)$ discende dalla formula di duplicazione $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, sostituendo $x/2$ al posto di x :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = 2 \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} \cos^2(x/2) = 2 \tan(x/2) \frac{1}{\frac{\cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} \\ &= 2 \tan(x/2) \frac{1}{\frac{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = 2 \tan(x/2) \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = 2 \tan(x/2) \frac{1}{1 + \tan^2(x/2)} \\ &= \frac{2t}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Si osservi inoltre che l'ultimo passaggio in (6) si ricava ancora dalle formule di duplicazione $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$, sostituendo $x/2$ al posto di x :

$$\left. \begin{aligned} \cos(x) = 2\cos^2(x/2) - 1 &\Rightarrow \cos^2(x/2) = \frac{1 + \cos(x)}{2} \\ \cos(x) = 1 - 2\sin^2(x/2) &\Rightarrow \sin^2(x/2) = \frac{1 - \cos(x)}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{|1 - \cos(x)|}{|1 + \cos(x)|}}$$

2) Un secondo modo di procedere è di porre inizialmente $t = \cos(x)$, da cui $dt = -\sin(x)dx$ e l'integrale diventa

$$\int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)} dx = - \int \frac{1}{1 - t^2} dt = \int \frac{1}{t^2 - 1} dt$$

Possiamo applicare il metodo di decomposizione del primo tipo perchè si tratta di una funzione fratta con numeratore di grado zero e denominatore di grado due con discriminante positivo e radici $t_1 = 1$ e $t_2 = -1$. Si ha:

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 1} = \frac{A(t + 1) + B(t - 1)}{t^2 - 1} = \frac{(A + B)t + (A - B)}{t^2 - 1}$$

da cui discende immediatamente $A + B = 0$ e $A - B = 1$, che hanno come soluzione $A = -B = 1/2$. Quindi

$$\int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} (\ln(|t - 1|) - \ln(|t + 1|)) = \ln \left(\sqrt{\frac{|t - 1|}{|t + 1|}} \right)$$

dalla quale, ri-sostituendo $t = \cos(x)$ si ha

$$\int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)} dx = \ln \left(\sqrt{\frac{|\cos(x) - 1|}{|\cos(x) + 1|}} \right)$$

esattamente come nel caso precedente.

Esercizio 3, parte opzionale

Calcoliamo la derivata seconda di $f(x)$ partendo dalla forma (2):

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} \right)^{-1/2} \cdot \frac{(2x - 4)(x^2 - 2x) - (2x - 2)(x^2 - 4x + 3)}{x^2(x - 2)^2} \cdot \frac{x^2 - 3x + 3}{(x - 1)^2(x - 3)^2} + \\ &\quad - \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} \right)^{1/2} \cdot \frac{(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3)^2 - (x^2 - 3x + 3)(2(x - 1)(x - 3)^2 + 2(x - 1)^2(x - 3))}{(x - 1)^4(x - 3)^4} \\ &= - \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} \right)^{-1/2} \left\{ \frac{(x - 2)(x^2 - 2x) - (x - 1)(x^2 - 4x + 3)}{x^2(x - 2)^2} \cdot \frac{x^2 - 3x + 3}{(x - 1)^2(x - 3)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} \right| \cdot \frac{(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3)^2 - 2(x^2 - 3x + 3)(x - 1)(x - 3)((x - 3) + (x - 1))}{(x - 1)^4(x - 3)^4} \right\} \end{aligned}$$

Si noti che il termine a fattore comune fuori dalle parentesi graffe è esattamente $f(x)$, che è non negativa in tutto il suo dominio. Inoltre, il termine entro il modulo è il radicando di $f(x)$ che, per le condizioni di esistenza imposte all'inizio, è sempre non negativo nel dominio di $f(x)$. Possiamo pertanto procedere eliminando il modulo dal primo fattore del secondo addendo. Considerando ora solo la somma entro le graffe. Il primo addendo dà:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2 - 3x + 3}{(x - 1)^2(x - 3)^2} \cdot \frac{(x - 2)(x^2 - 2x) - (x - 1)(x^2 - 4x + 3)}{x^2(x - 2)^2} \\ &= \frac{(x^2 - 3x + 3)(x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x - (x^3 - x^2 - 4x^2 + 4x + 3x - 3))}{x^2(x - 2)^2(x - 1)^2(x - 3)^2} \\ &= \frac{(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 3x + 3)}{x^2(x - 2)^2(x - 1)^2(x - 3)^2} = \frac{(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x^3 + 9x^2 - 9x + 3x^2 - 9x + 9)}{x^2(x - 2)^2(x - 1)^2(x - 3)^2} \\ &= \frac{x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 9}{x^2(x - 2)^2(x - 1)^2(x - 3)^2} \end{aligned}$$

Il secondo addendo dentro le graffe invece dà:

$$\begin{aligned} & \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)} \cdot \frac{(x-1)(x-3)((2x-3)(x-1)(x-3) - 2(x^2-3x+3)(2x-4))}{(x-1)^4(x-3)^4} \\ &= \frac{(2x-3)(x^2-4x+3) - 4(x^2-3x+3)(x-2)}{x(x-2)(x-1)^2(x-3)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x^2 + 12x + 6x - 9 - 4(x^3 - 2x^2 - 3x^2 + 6x + 3x - 6)}{x(x-2)(x-1)^2(x-3)^2} \\ &= \frac{-2x^3 + 9x^2 - 18x + 15}{x(x-2)(x-1)^2(x-3)^2}. \end{aligned}$$

Sommando dunque le due frazioni il denominatore diventa $x^2(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$, mentre il numeratore diventa

$$\begin{aligned} & x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 9 + (-2x^3 + 9x^2 - 18x + 15)x(x-2) \\ &= x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 9 - 2x^5 + 4x^4 + 9x^4 - 18x^3 - 18x^3 + 36x^2 + 15x^2 - 30x \\ &= -2x^5 + 14x^4 - 42x^3 + 66x^2 - 48x + 9. \end{aligned}$$

In conclusione, la derivata seconda vale:

$$f''(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3}} \cdot \frac{2x^5 - 14x^4 + 42x^3 - 66x^2 + 48x - 9}{x^2(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2} \quad (7)$$

Il primo fattore del prodotto in (7) è esattamente $f(x)$ e dunque è non negativo in tutto D e si annulla solo in $x=0$ e $x=2$. Però, occorre fare attenzione che in questi due punti $f''(x)$ non è definita perchè essi annullano anche il denominatore della frazione nel secondo fattore. È immediato verificare che in questi due punti $\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 2^-} f''(x)$ e dunque $f''(x) < 0$ in un intorno sinistro sia di $x=0$ che di $x=2$, ossia qui $f(x)$ è concava. Nella frazione del secondo fattore di (7) il denominatore, quando non si annulla, è sempre positivo, quindi il segno di $f''(x)$ dipende solo dal numeratore di questa seconda frazione. Inoltre, avendo escluso $x=0$ e $x=2$ dal campo di esistenza di $f''(x)$, anche gli zeri della derivata seconda sono tutti e soli gli zeri di numeratore di (7). Possiamo pertanto concentrare l'attenzione solo su questo polinomio. Si tratta di un polinomio di quinto grado: per capirne il comportamento occorre studiarlo come funzione a parte.

N.B.: agli effetti del compito l'esercizio poteva concludersi anche qui.

Sia dunque

$$p_5(x) = 2x^5 - 14x^4 + 42x^3 - 66x^2 + 48x - 9.$$

Dato che si tratta di un polinomio di grado dispari con coefficiente del termine di grado massimo positivo, si ha subito

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p_5(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p_5(x) = +\infty$$

pertanto $p_5(x)$ si annulla in *almeno* un punto x_1 . Per capire se esistono altre radici reali di $p_5(x)$ (e dunque di $f''(x)$) determiniamo massimi e minimi relativi e ne confrontiamo i segni. La derivata prima è un polinomio di quarto grado: $p'_5(x) = q_4(x) = 10x^4 - 56x^3 + 126x^2 - 132x + 48$. Essendo $q_4(x)$ un polinomio di grado pari con coefficiente del termine di grado massimo positivo, siamo certi che ammette almeno un punto di minimo assoluto (esso infatti diverge a $+\infty$ sia per $x \rightarrow -\infty$ che per $x \rightarrow +\infty$). Esso inoltre può avere da 0 a 4 radici reali, eventualmente non tutte distinte. Sfortunatamente, anche questo polinomio non è agevole da studiare e facciamo di nuovo ricorso alla derivata di $q_4(x)$, che è un polinomio di terzo grado: $q'_4(x) = r_3(x) = 40x^3 - 168x^2 + 252x - 132$. Per questo polinomio $r_3(x)$ siamo certi che esiste *almeno* una radice reale, perchè $\lim_{x \rightarrow -\infty} r_3(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} r_3(x) = +\infty$ e questo conferma che $q_4(x)$ ammette *almeno* un punto critico (che in questo caso è, appunto, un punto di minimo). Se $r_3(x)$ avesse *una sola radice*, allora potremmo concludere che $q_4(x)$ ammette *un solo* punto critico (minimo relativo e assoluto) e da qui si potrebbe dedurre che $q_4(x)$ ammette *al più* 2 radici, eventualmente coincidenti. Per determinare il comportamento di $r_3(x)$ facciamo ancora una volta ricorso alla derivata prima, che è un polinomio di secondo grado: $r'_3(x) = z_2(x) = 120x^2 - 336x + 252$. Si vede immediatamente che il discriminante di questo polinomio è negativo: $\Delta = 168^2 - 120 \cdot 252 = -2016 < 0$. Dunque $z_2(x)$ non si annulla mai ed è sempre

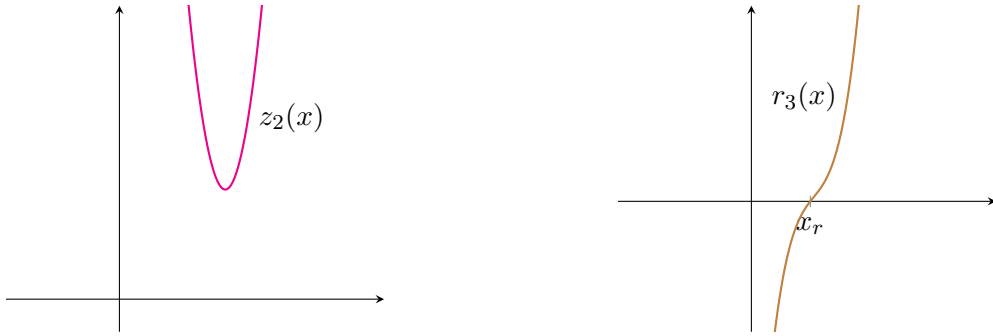


Figura 2: il comportamento qualitativo di $z_2(x)$ (a sinistra) consente di dedurre il comportamento qualitativo di $r_3(x)$ (a destra).

positivo (concorde con il segno del termine di grado massimo, che è 120). Ne discende che $r_3(x)$ è sempre strettamente crescente, da cui deriva che $r_3(x)$ ammette effettivamente *un'unica* radice reale: sia x_r , tale che $r_3(x_r) = 0$ (fig. 2). Inoltre, $r_3(x) < 0 \forall x < x_r$ ed $r_3(x) > 0 \forall x > x_r$: allora, poiché da questo discende che $q_4(x)$ è decrescente per $x < x_r$ e crescente per $x > x_r$, abbiamo conferma che $q_4(x)$ ammette *l'unico* punto critico x_r , che è un punto di minimo relativo ed assoluto. Si noti che non siamo a conoscenza del valore x_r . A questo punto possono presentarsi tre casi: (i) $q_4(x_r) > 0$, (ii) $q_4(x_r) = 0$ oppure (iii) $q_4(x_r) < 0$ (fig. 3). Nel caso (i) il polinomio $q_4(x)$ è sempre positivo e non si annulla mai, quindi $p_5(x)$ risulterebbe

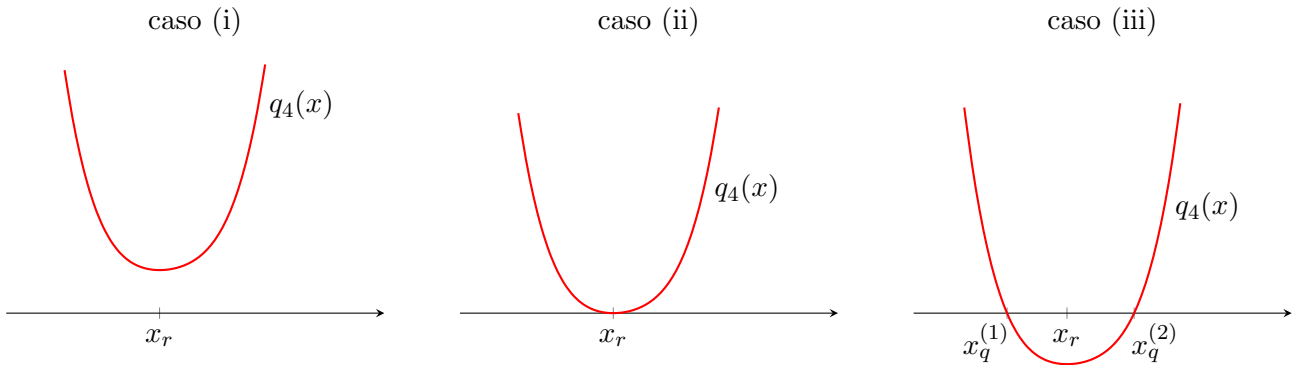


Figura 3: i tre possibili casi per $p_4(x)$, a seconda del valore che esso assume nel suo unico punto di minimo globale x_r .

sempre strettamente crescente e dunque ammetterebbe *un'unica* radice reale (fig. ??). Nel caso (ii) $q_4(x)$ è non negativo $\forall x \in \mathbb{R}$, ma ha x_r come radice (di molteplicità 2 perchè è anche $q_4'(x_r) = r_3(x_r) = 0$): allora in questo caso $p_5(x)$ ammetterebbe ancora *un'unica* radice, che sarebbe anche un punto di flesso, con tangente orizzontale perchè $p_5'(x_r) = q_4(x_r) = 0$ (fig. 4). Infine, nel caso (iii) $q_4(x)$ ammette due radici reali e distinte $x_q^{(1)} < x_q^{(2)}$, con $q_4(x) > 0$ per $x < x_q^{(1)}$ o $x > x_q^{(2)}$, e $q_4(x) < 0$ per $x_q^{(1)} < x < x_q^{(2)}$. In quest'ultimo caso

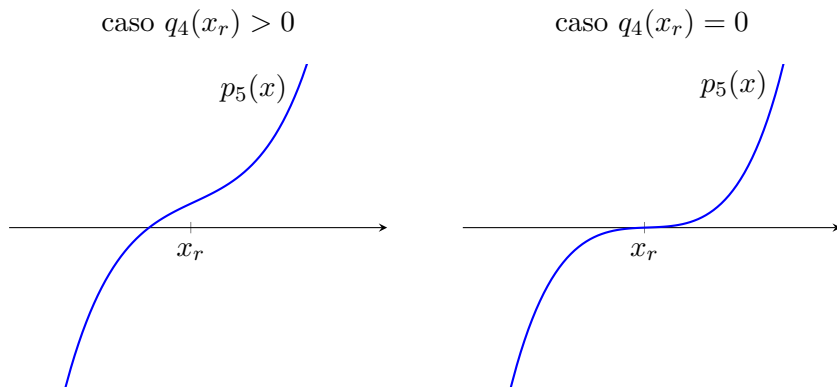


Figura 4: comportamento qualitativo del polinomio $p_5(x)$, e dunque della derivata seconda $f''(x)$, se $q_4(x)$ ammettesse nessuna (a sinistra) o al più una radice (a destra).

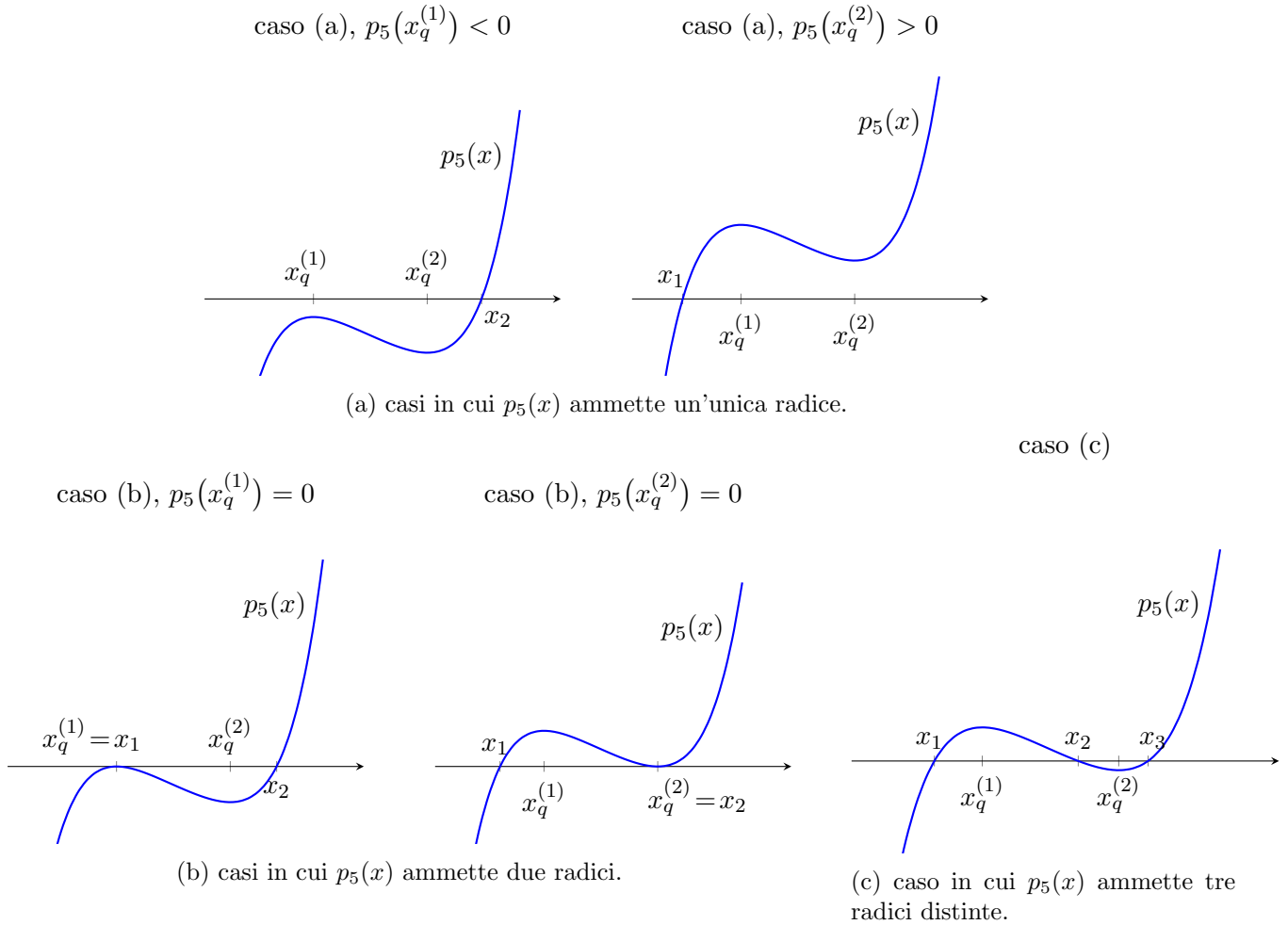


Figura 5: le possibili configurazioni del polinomio $p_5(x)$ nel caso in cui la sua derivata prima $q_4(x)$ ammetta due radici reali e distinte. Il polinomio $p_5(x)$ può ammettere una sola radice (caso (a)), due radici (caso (b)) o tre radici (caso (c)).

allora il polinomio $p_5(x)$ sarebbe crescente fino a $x_q^{(1)}$, decrescente da $x_q^{(1)}$ a $x_q^{(2)}$ e di nuovo crescente dopo $x_q^{(2)}$, con $x_q^{(1)}$ punto di massimo relativo e $x_q^{(2)}$ punto di minimo relativo. Nel caso (iii) dunque il polinomio $p_5(x)$ potrebbe avere una, due o tre radici reali, a seconda dei valori che assumerebbe in $x_q^{(1)}$ e in $x_q^{(2)}$:

- a) fig. 5a: una sola radice x_1 se $p_5(x_q^{(1)}) < 0$ (in tal caso $x_1 > x_q^{(2)}$) oppure se $p_5(x_q^{(2)}) > 0$ (in tal caso $x_1 < x_q^{(1)}$);
- b) fig. 5b: due radici distinte $x_1 < x_2$ se $p_5(x_q^{(1)}) = 0$ (in tal caso $x_1 = x_q^{(1)}$ e $x_2 > x_q^{(2)}$) oppure $p_5(x_q^{(2)}) = 0$; (in tal caso $x_1 < x_q^{(1)}$ e $x_2 = x_q^{(2)}$);
- c) fig. 5c: tre radici x_1, x_2 e x_3 se $p_5(x_q^{(1)}) > 0$ e $p_5(x_q^{(2)}) < 0$ (in tal caso $x_1 < x_q^{(1)}$, $x_q^{(1)} < x_2 < x_q^{(2)}$ e $x_3 > x_q^{(2)}$).

Dato che le radici di $p_5(x)$ sono gli zeri di $f''(x)$, ciascuna delle situazioni appena descritte corrisponde al fatto che in $f(x)$ si osservino uno, due oppure tre cambi di convessità/concavità, rispettivamente. Riassumendo, tutto dipende dal segno che assume $q_4(x)$ nel punto x_r di minimo globale: poichè non si è determinato il valore di x_r , non è possibile determinare con un calcolo diretto $q_4(x_r)$. Tuttavia, se possiamo determinare facilmente un punto \hat{x} in cui $q_4(\hat{x}) < 0$ (anche se non si tratta del punto di minimo assoluto, cioè anche se $\hat{x} \neq x_r$), allora possiamo affermare con certezza che $q_4(x_r) < 0$ e dunque stabilire che $p_5(x)$ può avere da uno a tre zeri. A solo scopo illustrativo, il comportamento effettivo dei quattro polinomi è illustrato in fig. 6. In effetti, si vede molto rapidamente che $q_4(1) = -4 < 0$ (mentre $q_4(0) = 48 > 0$). Pertanto, concludiamo che $f''(x)$ può avere da uno a tre zeri, ossia che $f(x)$ ha da uno a tre cambi di convessità (cioè da uno a tre punti di flesso). Non è agevole determinare la posizione delle radici x_1 (x_2 e x_3 , se ci sono), ma si può fare un tentativo con valori semplici di x : ad esempio, calcolando $p_5(x)$ in $x = 0, 1, 2, 3$ si ha

$$p_5(0) = -9, \quad p_5(1) = 3, \quad p_5(2) = -1, \quad p_5(3) = 27.$$

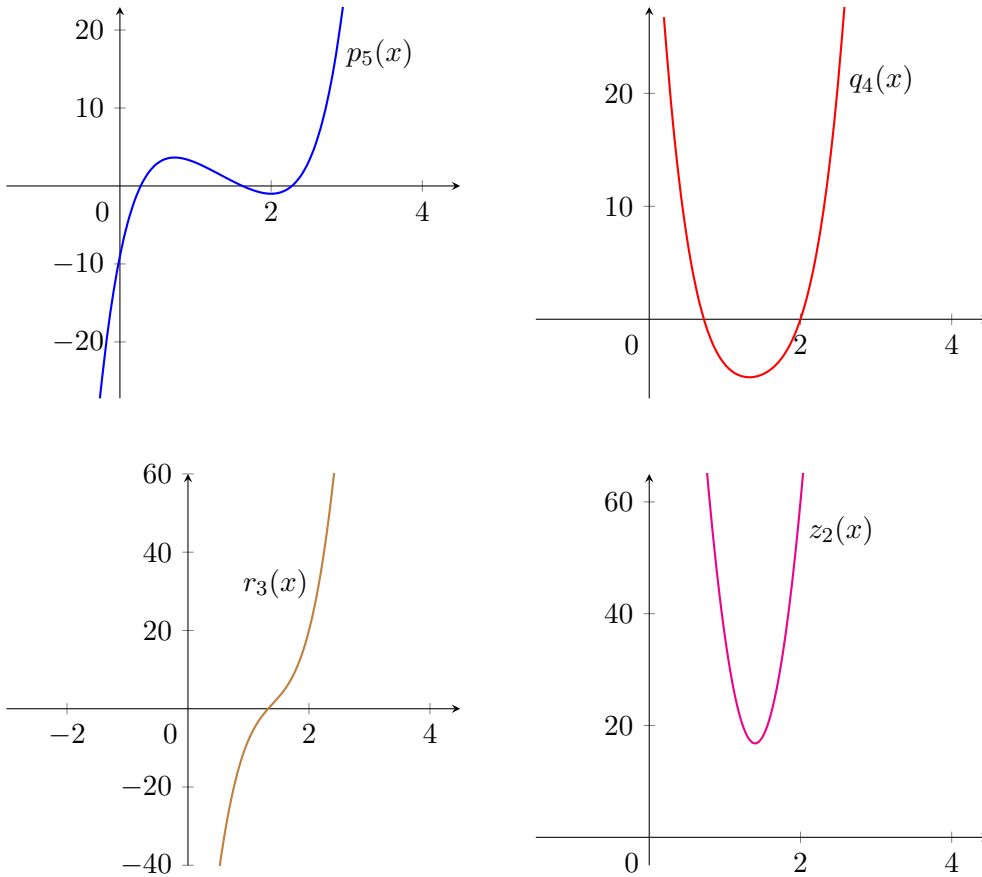
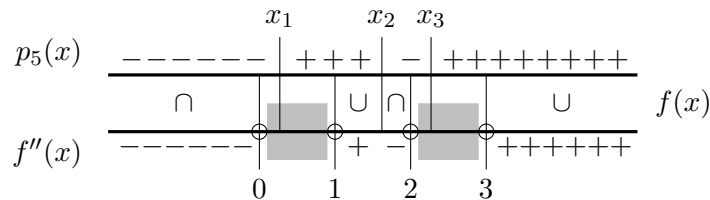


Figura 6: comportamento effettivo dei polinomi $p_5(x)$, $q_4(x)$, $r_3(x)$ e $z_2(x)$, che consentono di studiare il segno di $f''(x)$.

Si deduce perciò immediatamente che $p_5(x)$ ammette tre radici distinte $x_1 \in]0, 1[$, $x_2 \in]1, 2[$, $x_3 \in]2, 3[$. Tuttavia, x_1 e x_3 non possono essere prese in considerazione perchè non appartengono al dominio di definizione di $f(x)$ (e nemmeno di $f''(x)$). Pertanto, l'unica radice di $f''(x)$ da considerare è x_2 , che conferma quanto era stato determinato qualitativamente con considerazioni geometriche in fig. 1, cioè il fatto che nell'intervallo $]1, 2[$ la funzione $f(x)$ ha un punto di flesso (con tangente obliqua perchè $f'(x) < 0 \forall x \in]1, 2[$). Tuttavia, anche se non possiamo considerare i valori che $f''(x)$ assume nei punti x_1 e x_3 perchè non appartengono al suo campo di esistenza, per quanto osservato più sopra possiamo sfruttarli per determinare il segno di $p_5(x)$ in tutto \mathbb{R} , e dunque il segno di $f''(x)$ nel suo dominio. Per quanto osservato prima, dunque, $p_5(x) < 0$ per $x < x_1$, $p_5(x) > 0$ per $x_1 < x < x_2$, $p_5(x) < 0$ per $x_2 < x < x_3$, $p_5(x) > 0$ per $x > x_3$. Allora, poichè $0 < x_1 < 1$, $1 < x_2 < 2$ e $2 < x_3 < 3$, si ha che $f''(x) < 0$ per $x < 0$ e per $x_2 < x < 2$, mentre $f''(x) > 0$ per $1 < x < x_2$ e per $x > 3$. La situazione è la seguente (le zone ombreggiate sono fuori dal campo di esistenza di $f(x)$ e di $f''(x)$):



Concludiamo così che $f(x)$ è concava in $] - \infty, 0[\cup]x_2, 2[$ ed è convessa in $]1, x_2[\cup]3, +\infty[$, che conferma il comportamento qualitativo indicato in fig. 1.