Prova scritta di Istituzioni di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

16 giugno 2016

1 Prova totale

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+1}{2\,x-1} \geq 2$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:

$$A = \left\{ \sqrt{x^2 + 2\,x + 3} + x;\ x \in \mathcal{R} \right\}$$

3. Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$$

e disegnarne il grafico.

4. Calcolare i seguenti integrali:

$$a) \quad \int_1^2 \frac{x^3}{(x+2)(x+1)}\,dx, \quad b) \quad \int_0^3 (x+2)\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

5. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 4 + y^2 \\ y(0) = \pi/2 \end{cases}$$

6. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\,(x - \lg(1+x))}{x - \sin x}$$

2 Recupero prima prova parziale

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+1}{2\,x-1} \geq 2$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:

$$A = \left\{ \sqrt{x^2 + 2\,x + 3} + x;\ x \in \mathcal{R} \right\}$$

3. Dire se la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1},\ x \neq 1$$

é iniettiva e calcolarne l'insieme dei valori (o codominio).

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1}\ \lg \left(\frac{x+1}{x+3} \right), \quad b)\ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 4\,x + 5} \right)^{\sqrt{x+1}}$$

3 Recupero secondo parziale

1. Studiare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$$

e disegnarne il grafico.

2. Calcolare i seguenti integrali:

$$a) \quad \int_1^2 \frac{x^3}{(x+2)(x+1)}\, dx, \quad b) \quad \int_0^3 (x+2)\sqrt{9 - x^2}\, dx.$$

3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 4 + y^2 \\ y(0) = \pi/2 \end{cases}$$

4. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\,(x - \lg(1+x))}{x - \sin\, x}$$

Correzione

- PROVA TOTALE.

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+1}{2\,x-1}\geq 2$$

Riducendo allo stesso denominatore, si ottiene:

$$\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+1}{2\,x-1}\geq 2 \iff \frac{2\,x^2-2\,x-x+1+x^2+x+2\,x+2-2\left(2\,x^2-x+4\,x-2\right)}{(x+2)(2\,x-1)}\geq 0$$

e semplificando:

$$\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+1}{2\,x-1}\geq 2 \iff \frac{x^2+6\,x-7}{(x+2)(2\,x-1)}\leq 0$$

Siccome il polinomio a numeratore ha come soluzioni -7 e 1, possiamo concludere che

$$\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+1}{2\,x-1}\geq 2 \iff x\in[-7,-2)\cup\left(\frac{1}{2},1\right]$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:

$$A=\left\{\sqrt{x^2+2\,x+3}+x;\ x\in\mathcal{R}\right\}$$

Siccome

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2\,x+3}+x=+\infty$$

l'insieme A non é superiormente limitato. D'altra parte, un numero $d \in \mathcal{R}$ é un minorante l'insieme A se e solo se

$$\sqrt{x^2+2\,x+3}+x\geq d,\quad \forall x\in\mathcal{R}$$

Ora

$$\sqrt{x^2+2\,x+3}+x\geq d \iff \sqrt{x^2+2\,x+3}\geq d-x$$

Infine se $d-x<0$ la diseguaglianza precedente é verificata, mentre se $d-x\geq 0$, la diseguaglianza precedente equivale a quella che si ottiene elevando al quadrato, ossia

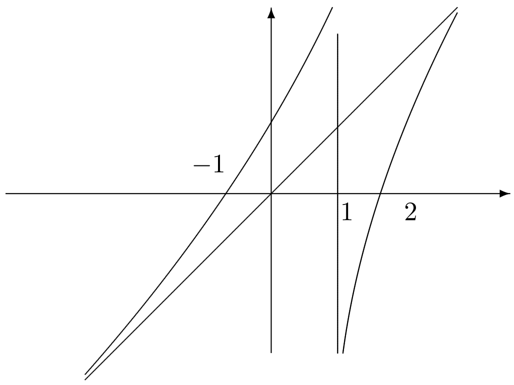
$$x^2+2\,x+3\geq d^2-2\,d\,x+x^2 \iff 2(1+d)x\geq d^2-3$$

Infine se $d=-1$, l'ultima diseguaglianza diventa l'identitá $0\geq -2$ che é verificata. Ne possiamo quindi dedurre che $d=-1$ é un minorante per il nostro insieme A. Per concludere osserviamo che se $d>-1$ allora $1+d>0$ e la nostra disequazione diventa

$$x\geq\frac{d^2-3}{2+2\,d}$$

Pertanto se $d>-1$, d non é minorante l'insieme A e quindi $\inf A=-1$ che non é il minimo elemento di A perché $-1\notin A$.

3. Studiare la funzione:
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$$
e disegnarne il grafico.
La funzione é definita $\forall x \in \mathcal{R},\ x \neq 1$. Siccome il numeratore si annulla per $x = -1$ e $x = 2$, si ottiene che
$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$$
e
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$
Ora
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2}{x - 1} = 0$$
la retta $y = x$ é un ascintoto al nostro grafico sia a $-\infty$ che a $+\infty$. Calcoliamo ora la derivata prima, si ottiene:
$$f'(x) = \frac{(2\,x - 1)(x - 1) - (x^2 - x - 2)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2\,x + 3}{(x - 1)^2}$$
Ne deriva che la derivata prima é sempre positiva. Calcolando infine la derivata seconda, si ha:
$$f''(x) = \frac{(2\,x - 2)(x - 1)^2 - (x^2 - 2\,x + 3)\,2\,(x - 1)}{(x - 1)^4} = \frac{-4}{(x - 1)^3}$$
Pertanto la funzione f é convessa se e solo se $x < 1$. Il grafico é quindi del tipo:



4. Calcolare i seguenti integrali:
$$a) \quad \int_1^2 \frac{x^3}{(x + 2)(x + 1)}\,dx, \quad b) \quad \int_0^3 (x + 2)\sqrt{9 - x^2}\,dx.$$
Facendo la divisione, si ottiene $x^3 = (x^2 + 3\,x + 2)(x - 3) + 7\,x + 6$. Infine decomponendo
$$\frac{7\,x + 6}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A\,x + A + B\,x + 2\,B}{(x + 2)(x + 1)}$$

deve essere

$$\begin{cases} A+B=7 \\ A+2\,B=6 \end{cases}$$

Pertanto sottraendo le due equazioni $B=-1$ e quindi $A=7-B=8$. Ne possiamo quindi concludere che:

$$\int_1^2 \frac{x^3}{(x+2)(x+1)}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - 3\,x + 8\,\log|x+2| - \log|x+1|\right)\Bigg|_1^2$$

Usando la sostituzione $x = 3\,\sin\,t$, si ottiene:

$$\int_0^3 (x+2)\sqrt{9-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} (3\,\sin\,t+2)3\cos\,t\;(3\,\cos\,t)\,dt =$$

$$= 27\int_0^{\pi/2} \sin\,t\,\cos^2\,t\;dt + 18\int_0^{\pi/2} \cos^2\,t\;dt$$

Possiamo infine usare la formula trigonometrica

$$\cos^2\,t = \frac{1+\cos{(2\,t)}}{2}$$

per concludere:

$$\int_0^3 (x+2)\sqrt{9-x^2}\,dx = \left[27\,\frac{-\cos^3\,t}{3} + 18\left(\frac{1}{2}\,t + \frac{\sin{(2\,t)}}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = 9\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

5. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 4+y^2 \\ y(0) = \pi/2 \end{cases}$$

L'equazione considerata é a variabili separabili, quindi, separando le variabili ed integrando, si ottiene:

$$x = \int_0^x \frac{y'(t)}{4+y^2(t)}\,dt = \int_{\pi/2}^{y(x)} \frac{ds}{4+s^2}\,ds$$

Siccome una primitiva della funzione integranda é $1/2\;\arctan(s/2)$ si ottiene

$$x = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y(x)}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ossia $y(x) = 2\;\arctan(2\,x+1.)$

6. Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,(x-\lg(1+x))}{x-\sin\,x}$$

Applicando le regole di De l'Hospital, si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,(x-\lg(1+x))}{x-\sin\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\lg(1+x)+\frac{x^2}{x+1}}{1-\cos\,x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-\lg(1+x)}{1-\cos\,x} + \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos\,x}\frac{1}{1+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x)\sin\,x} + 2 = 1+2 = 3$$

- RECUPERO PRIMO PARZIALE

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:
$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+1}{2\,x-1} \geq 2$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:
$$A = \left\{ \sqrt{x^2 + 2\,x + 3} + x;\ x \in \mathcal{R} \right\}$$

3. Dire se la funzione:
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x-1},\ x \neq 1$$
é iniettiva e calcolarne l'insieme dei valori (o codominio).
Risulta $f(x) = f(y) \Longleftrightarrow x^2\,y - x\,y - 2\,y - x^2 + x + 2 = x\,y^2 - x\,y - 2\,x - y^2 + y + 2$ e raccogliendo $x - y$:
$$f(x) = f(y) \Longleftrightarrow (x-y)(x\,y + 3 - x - y) = 0$$
Possiamo quindi concludere che $f(x) = f(y)$ anche quando $x \neq y$ purché sia $x\,y + 3 - x - y = 0$ ossia
$$y = \frac{x-3}{x-1}$$
In particolare se $x = 0$ $y = 3$, ossia $f(0) = f(3) = 2$ e la funzione f non é iniettiva,
Infine se $y \in \mathcal{R}$
$$f(x) = y \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 = y(x-1) \Longleftrightarrow x^2 - (1+y)x + y - 2 = 0$$
Calcolando il Δ dell'ultimo polinomio di secondo grado si ottiene
$$\Delta(y) = (1+y)^2 - 4(y-2) = 1 + y^2 + 2\,y - 4\,y + 8 = (1-y)^2 + 8 > 0 \quad \forall y \in \mathcal{R}$$
Possiamo quindi concludere che l'insieme dei valori di f é tutto $\mathcal{R}$.

4. Calcolare i seguenti limiti:
$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}\ \lg\left(\frac{x+1}{x+3}\right), \quad b)\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+4\,x+5}\right)^{\sqrt{x+1}}$$
Risulta
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}\ \lg\left(\frac{x+1}{x+3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}\ \lg\left(1 - \frac{2}{x+3}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg\left(1 - \frac{2}{x+3}\right)}{-\frac{2}{x+3}}\ \sqrt{x^2+1}\ \frac{-2}{x+3} = -2$$
Infine
$$\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+4\,x+5}\right)^{\sqrt{x+1}} = \left(1 - \frac{3\,x+4}{x^2+4\,x+5}\right)^{\sqrt{x+1}} =$$

$$= \left[\left(1 - \frac{3\,x+4}{x^2+4\,x+5} \right)^{\frac{x^2+4\,x+5}{3\,x+4}} \right]^{\sqrt{x+1}\;\frac{3\,x+4}{x^2+4\,x+5}}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+4\,x+5} \right)^{\sqrt{x+1}} = \left[\frac{1}{e} \right]^0 = 1$$