Prima prova scritta di Istituzioni di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

20 gennaio 2015

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:
$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} \geq 3$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:
$$A = \left\{ \sqrt{4\,x^2+x+5} - 2\,x + 1,\ x \in \mathcal{R} \right\}$$

3. Sia
$$f(x) = \frac{2\,x^2+x+4}{x-3},\ x \in \mathcal{R},\ x \neq 3$$
Dire se f é iniettiva e calcolarne l'insieme dei valori.

4. Calcolare i seguenti limiti:
$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1+x}}{1-\cos(\pi\,x)}, \quad b) \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 \ \log\left(\frac{4\,x-1}{4\,x+10}\right)$$

Correzione

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} \geq 3$$

Risulta.

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} \geq 3 \Longleftrightarrow \frac{x^2+x-2-3\,x^2+3\,x+6}{x^2-x-2} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{2(x^2-2\,x-2)}{x^2-x-2} \leq 0$$

Ora il numeratore si annulla per

$$x = x_{1\,2} = 1 \mp \sqrt{3}$$

mentre il denominatore si annulla per

$$x = z_{1\,2} = \frac{1 \mp 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Pertanto l'andamento dei segni di numeratore e denominatore é dato da:

$+ + + + + + - - - - - - - - - - + + +$ Numeratore

$\qquad\qquad x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad x_2$

$+ + + \quad - - - - - - - - - - \quad + + +$ Denominatore

$\qquad -1 \qquad\qquad\qquad\qquad 2$

Ne deriva quindi che

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} \geq 3 \Longleftrightarrow x \in \left(-1, 1-\sqrt{3}\right] \cup \left(2, 1+\sqrt{3}\right]$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:

$$A = \left\{\sqrt{4\,x^2+x+5} - 2\,x + 1,\ x \in \mathcal{R}\right\}$$

Osserviamo in primo luogo che:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4\,x^2+x+5} - 2\,x + 1\right) = +\infty$$

e quindi $\sup A = +\infty$, ossia l'insieme A non é superiormente limitato. D'altra parte $d \in \mathcal{R}$ é un minorante dell'insieme A se e solo se:

$$\sqrt{4\,x^2+x+5} - 2\,x + 1 \geq d \quad \forall\, x \in \mathcal{R}$$

Ora

$$\sqrt{4\,x^2+x+5} - 2\,x + 1 \geq d \Longleftrightarrow \sqrt{4\,x^2+x+5} \geq d + 2\,x - 1$$

Infine se $d + 2\,x - 1 < 0$ la diseguaglianza precedente é verificata, mentre se $d + 2\,x - 1 \geq 0$ la diseguaglianza precedente é equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato, ossia:

$$4\,x^2 + x + 5 - \geq d^2 + 4\,x^2 + 1 + 4\,d\,x - 2\,d - 4\,x \Longleftrightarrow (5 - 4\,d)x \geq d^2 - 2\,d - 4 \tag{1}$$

Ora, se $5-4\,d=0$, ossia se $d=5/4$, la (1) diventa:

$$0 \geq \frac{25}{16}-\frac{5}{2}-4=-\frac{79}{16} \tag{2}$$

che risulta verificata. Pertanto $d=5/4$ é un minorante dell'insiema A. D'altra parte se $d>5/4$, allora $5-4\,d<0$ e la (1) diventa:

$$x \leq \frac{d^2-2\,d-4}{5-4\,d}$$

e quindi se $d>4/5$, d non é minorante dell'insieme A. Possiamo quindi concludere che $\inf A=5/4$. Siccome nella (2) vale la diseguaglianza stretta, possiamo concludere che $5/4 \notin A$ e che quindi A non ha minimo.

3. Sia

$$f(x)=\frac{2\,x^2+x+4}{x-3},\ x \in \mathcal{R},\ x \neq 3$$

Dire se f é iniettiva e calcolarne l'insieme dei valori.

Osserviamo che

$$f(x)=f(y) \Longleftrightarrow \frac{2\,x^2+x+4}{x-3}=\frac{2\,y^2+y+4}{y-3} \Longleftrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2\,x^2\,y+x\,y+4\,y-6\,x^2-3\,x-12=2\,x\,y^2+x\,y+4\,x-6\,y^2-3\,y-12 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x-y)(2\,x\,y-6\,x-6\,y-7)=0$$

Possiamo dunque concludere che se x e y sono diversi ma sono legati tra di loro dalla relazione $2\,x\,y-6\,x-6\,y-7=0$, allora risulta $f(x)=f(y)$. In particolare $f(0)0f(-7/6)$. Pertanto la funzione f non é iniettiva. D'altra parte

$$f(x)=y \Longleftrightarrow \frac{2\,x^2+x+4}{x-3}=y \Longleftrightarrow 2\,x^2+x+40x\,y-3\,y \Longleftrightarrow 2\,x^2+(1-y)x+4+3\,y=0$$

Quest'ultima equazione nella x ha soluzione se e solo se $\Delta(y)=(1-y)^2-6(4+3\,y)\geq 0$ ossia $y^2-26\,y-31\geq 0$. Essendo le due suluzioni del polinomio di secondo grado trovato $y_{1\,2}=13 \mp 10\sqrt{2}$, si ricava che l'insieme dei valori della funzione f é dato dall'insieme $\big(-\infty, 13-10\sqrt{2}\big] \cup \big[13+10\sqrt{2}, +\infty\big)$.

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1+x}}{1-\cos(\pi\,x)}, \quad b) \quad \lim_{x\to+\infty} x^2\ \log\left(\frac{4\,x-1}{4\,x+10}\right)$$

a) Razionalizzando, ottengo:

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1+x}}{1-\cos(\pi\,x)}=\frac{1+x+x^2-1-x}{1-\cos(\pi\,x)}\ \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1+x}}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\ \frac{(\pi\,x)^2}{1-\cos(\pi\,x)}\ \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1+x}}$$

Ricordando infine il limite fondamentale:

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y} = \frac{1}{2}$$

si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1+x}}{1-\cos(\pi\, x)} = \frac{1}{\pi^2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi^2}$$

b) Risulta:

$$x^2\ \log\left(\frac{4\,x-1}{4\,x+10}\right) = x^2\ \log\left(1-\frac{11}{4\,x+10}\right) = \frac{\log\left(1-\frac{11}{4\,x+10}\right)}{-\frac{-11}{4\,x+10}}\cdot\left(-\frac{11\,x^2}{4\,x+10}\right)$$

Siccome

$$\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

ottengo:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\ \log\left(\frac{4\,x-1}{4\,x+10}\right) = -\infty$$