# Corso di Laurea in Informatica – Università di Ferrara
# Istituzioni di Matematica
# Prova scritta del 4/9/2014 – A.A. 2013–2014

1) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x+3} \leq \frac{1}{2}$$

2) Sia dato l'insieme

$$A = \left\{ \sqrt{x^2+2x+3} - x + 1 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Trovare $\sup(A)$ e $\inf(A)$.

3) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{4+3x-x^2} - 2x$$

determinando tutte le proprietà (esistenza, segno, crescenza/decrescenza, convessità/concavità, ...), fino a disegnarne il grafico.

4) Calcolare i seguenti integrali, esplicitando tutti i passaggi:

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\pi} x^2 \cos(2x) \mathrm{d}x \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^2 \sqrt{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x$$

5) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2 \mathrm{e}^{2x}$$

6) Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2x+1}{y(x)-1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dove $y(x) \neq 1$.

A

1

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x+3} \le \frac{1}{2} \qquad 2(x+1)(x+3)$$

$$\frac{2(x+3)x + 2(x+1)(x-1) - (x+1)(x+3)}{2(x+1)(x+3)} \le 0$$

$$2x^2 + 6x + 2x^2 - 2 - x^2 - 3x - x - 3$$

$$\frac{3x^2 + 2x - 5}{(x+1)(x+3)} \le 0$$

$$\cancel{\frac{-2 \pm \sqrt{4+15}}{3}} \Rightarrow \cancel{\frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+15}}{3} = \frac{-1 \pm 4}{3} \begin{cases} 1 \\ -5/3 \end{cases}$$

++ $-5/3$ − − − − − − $1$ +++ N

++ $-3$ − − − − $-1$ +++++++++

$$x \in \left(-3, -5/3\right] \cup \left(-1, 1\right]$$

(B

(2) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\phantom{x}} - x + 1 = +\infty$

$\Rightarrow \sup A = +\infty$

$\sqrt{\phantom{x}} - x + 1 \geq d \Leftrightarrow$

$\sqrt{\phantom{x}} \geq x + d - 1$

i) se $x+d-1 \leq 0$ OK

ii) se $x+d-1 \geq 0$ posso elevare al quadrato e ottengo:

$$\cancel{x^2} + 2x + 3 \geq \cancel{x^2} + d^2 + 1 + 2xd - 2x - 2d$$

$$(4-2d)x \geq d^2 - 2d - 2$$

α) se $4 - 2d = 0$ ossia $d = 2$, ho:

$$0 \geq 4 - 4 - 2 = -2 \quad \text{OK}$$

pertanto $d = 2$ e' un minorante pertanto anche ogni numero $d \leq 2$

β) se $d > 2 \Rightarrow 4 - 2d < 0$

e quindi:

$$(4-2d)x \geq d^2 - 2d - 2 \Leftrightarrow$$

$$x \leq \frac{d^2 - 2d - 2}{4 - 2d}$$

pertanto se $d > 2$ $d$ non e' minorante perche scelto (c

$x \in \mathbb{R}$ con $x > d-1$ e

$x > \dfrac{d^2-2d-2}{4-2d}$ risulta

$$\sqrt{x^2+2x+3} - x - 1 < d$$

(3) deve essere $4+3x-x^2 \geq 0$

ossia $x^2-3x-4 \leq 0$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Allora $x \in [-1, 4]$

$$\begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(4) = -8 \end{cases}$$

$f(0) = \sqrt{4} = 2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\phantom{x}} = 2x \Leftrightarrow$

$x \geq 0$ e $4+3x-x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow$

$x \geq 0$ e $5x^2-3x-4 = 0 \Leftrightarrow$

$x \geq 0$ e $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+80}}{10}$

$\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{3+\sqrt{89}}{10} = x_1$ $\qquad 9 < \sqrt{89} < 10$

$$\frac{12}{10} < x_1 < \frac{13}{10}$$

$$f'(x) = \frac{3-2x}{2\sqrt{\phantom{x}}} - 2$$ e quindi

$$f'(x) \geq 0 \iff 3-2x \geq 4\sqrt{4+3x-x^2}$$

Deve quindi essere $3-2x \geq 0$ ossia $x \leq 3/2$ ed inoltre

$$9+4x^2-12x \geq 16(4+3x-x^2)$$ ossia

$$20x^2-60x-55 \geq 0$$

$$4x^2-12x-11 \geq 0$$

64 48
12
60

$$x_{12} = \frac{6 \pm \sqrt{36+44}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{80}}{4}$$

Siccome $x_2 = \frac{6+\sqrt{80}}{4} > 3/2$

$$f'(x) \geq 0 \iff x \in [-1,4] \text{ e } x < \frac{6-\sqrt{80}}{4}$$

$$8 < \sqrt{80} < 9$$

$$6-9 < 6-\sqrt{80} < 6-8$$

$$-\frac{3}{4} < \frac{6-\sqrt{80}}{4} < -\frac{1}{2}$$

Pertanto $x = \frac{6-\sqrt{80}}{4} = x_1$ sta nel dominio ed e' un punto di massimo relativo.

E

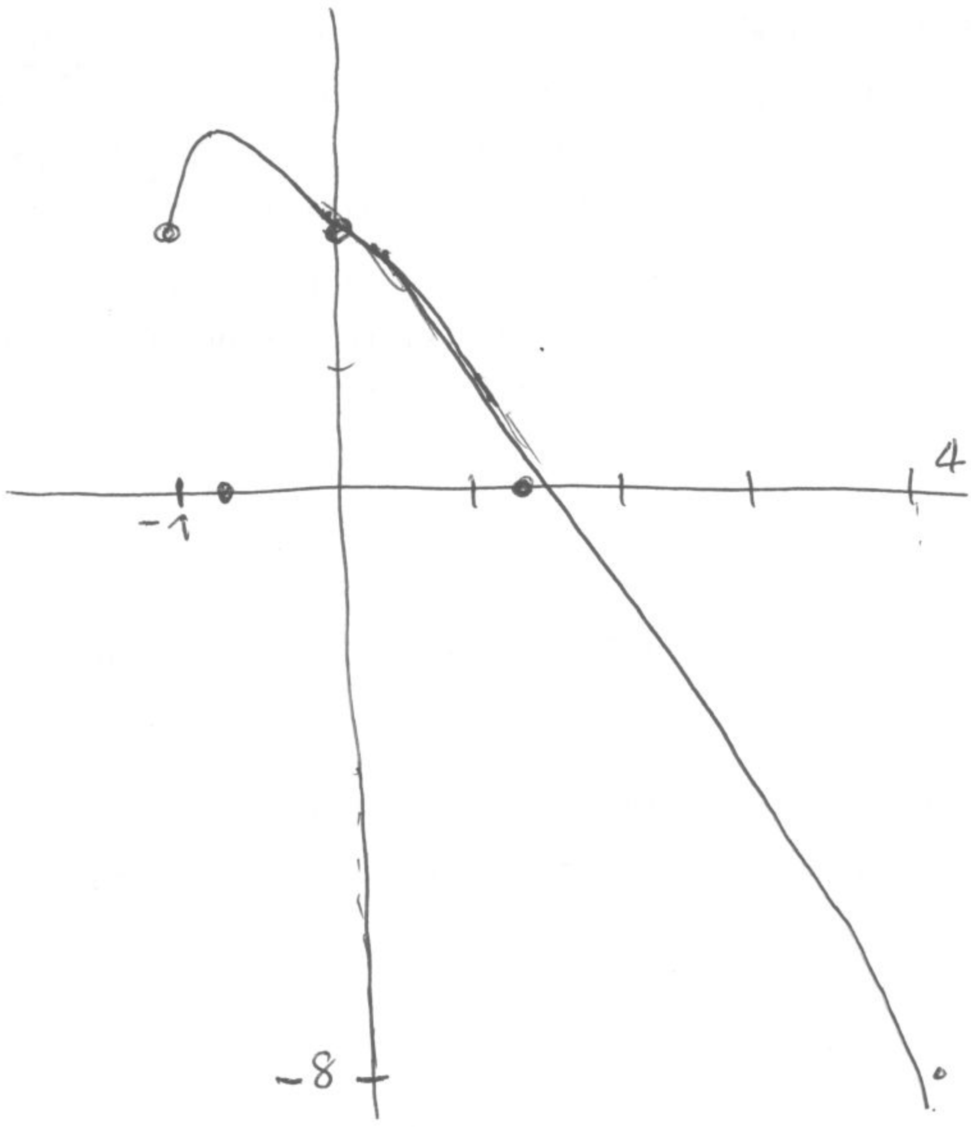
$$f''(x) = \frac{1}{2}\left[-2\sqrt{\ } - \frac{(3-2x)^2}{2\sqrt{\ }}\right]\frac{1}{(\sqrt{\ })^2}$$

$$= \frac{-4(4+3x-x^2) - 9 + 12x - 4x^2}{4(\sqrt{\ })^3}$$

$$= \frac{-16-9}{4(\sqrt{\ })^3}$$

Quindi $f''(x) < 0 \quad \forall x \in [-1,4]$

e' la funzione e' ~~convessa~~ concava



F

④ Integro per parte:

a) $$\int_0^\pi x^2 \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \cdot x^2 \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x \operatorname{sen}(2x)\,dx =$$

$$= -\left[ -\frac{\cos 2x}{2} \cdot x \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2x \, dx \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \, \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

b) $$x^2 + 4x + 6 = 2 + (x+2)^2$$

pertanto con la sostituzione

$$x + 2 = \sqrt{2} \operatorname{senh} t$$

ottengo

$$\int_0^2 \sqrt{x^2+4x+6}\,dx = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2 + 2\operatorname{senh}^2 t} \cdot \sqrt{2} \cosh t \, dt =$$

$$= 2 \int_{t_0}^{t_1} \cosh^2 t \, dt \qquad \text{dove}$$

con $t_0, t_1$ sono indicati i due numeri positivi tali che

$$2 = \sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,t_0$$
$$4 = \sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,t_1$$

siccome $\cos^2 h t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2$

$$= \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4}.$$

possiamo concludere che

$$\int_0^2 \sqrt{x^2+4x+6}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} + 2t\right]_{t_0}^{t_1}$$

(5) a) $yy' - y' = 2x+1 = \left(\frac{y^2}{2} - y\right)'$

perlomento

$$\frac{y^2}{2} - y = x^2 + x + c$$

$$y^2 - 2y - 2(x^2+x+c) = 0$$

$$y(x) = \underline{1 \pm \sqrt{1+2(x^2+x+c)}}$$

~~essendo~~ Dovendo essere $y(0)=0$ deve prendere il segno $-$ ~~nell'~~esp nell'espressione di $y$ e $c$ tale che

$$0 = 1 - \sqrt{1+2c} \qquad c = 0$$

la soluzione è

$$y(x) = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1}$$

b) Il polinomio associato è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \qquad \lambda = 2$$

Allora una soluzione particolare è del tipo:

$$4\ \bar{y}(x) = x^2(Ax^2+Bx+c)e^{2x} =$$
$$= (\cancel{A}x^4+\cancel{B}x^3+\cancel{C}x^2)e^{2x}$$

$$-4\ \bar{y}'(x) = e^{2x}(2\cancel{A}x^4+2\cancel{B}x^3+2\cancel{C}x^2+4\cancel{A}x^3+3\cancel{B}x^2$$
$$+2\cancel{C}x)$$

$$\bar{y}''(x) = e^{2x}(\cancel{4A}x^4+\cancel{4B}x^3+4\cancel{C}x^2+\cancel{16}^{8}\cancel{A}x^3+6\cancel{B}x^2$$
$$+4\cancel{C}x+8\cancel{A}x^3+6\cancel{B}x^2+\cancel{4}Cx+$$
$$12\cancel{A}x^2+6\cancel{B}x+2C)$$

$$L(y) = e^{2x}\{x^4(4A-8A+4A)+$$
$$x^3(\cancel{4B}+8A+8A-\cancel{8B}-16A+\cancel{4B})$$
$$x^2(\cancel{4C}+\cancel{6B}+\cancel{6B}+12A-\cancel{8C}$$
$$-\cancel{12B}+\cancel{4C})$$
$$x(\cancel{4C}+\cancel{4C}+6B-\cancel{8C})$$
$$+2C\}$$
$$= e^{2x}(12Ax^2+6Bx+2c)$$

$$12A = 1 \qquad A = \frac{1}{12}$$
$$6B = 0$$
$$2C = 0 \qquad \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$