Prova scritta di Istituzioni di Matematica (Prima parte)
Corso di Laurea Triennale in Informatica

21 gennaio 2016

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:
$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+3} \geq -1$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:
$$A = \left\{ \sqrt{x^2 - 2\,x + 7} - x, \; x \in \mathcal{R} \right\}$$

3. Sia
$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}, \; x \in \mathcal{R}$$
Dire se f é iniettiva e calcolarne l'insieme dei valori.

4. Calcolare i seguenti limiti:
$$a) \quad \lim_{n \to \infty} n^2 \; \sin\left(\frac{2\,n^2 + n}{1 + n^4}\right), \quad b) \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 3\,x}{x^2 + 2}\right)^x$$

Correzione

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+3} \geq -1$$

Si ottiene:

$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+3} \geq -1 \Longleftrightarrow \frac{(x+1)(x+3)+(x-1)(x-2)+(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)} \geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3\,x^2+2\,x-1}{(x-2)(x+3)} \geq 0$$

Confrontando i segni di numeratore e denominatore, possimo concludere che la diseguaglianza vale se e solo se:

$$x \in (-\infty, -3) \cup \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup (2, +\infty)$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:

$$A = \left\{\sqrt{x^2-2\,x+7} - x,\ x \in \mathcal{R}\right\}$$

Siccome:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-2\,x+7} - x = +\infty$$

si ottiene che $\sup A = +\infty$, ossia l'insieme A non é superiormente limitato. D'altra parte, $d \in \mathcal{R}$ é un minorante dell'insieme A se e solo se

$$\sqrt{x^2-2\,x+7} - x \geq d, \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

D'altra parte

$$\sqrt{x^2-2\,x+7} - x \geq d \Longleftrightarrow \sqrt{x^2-2\,x+7} \geq x+d$$

Supposto infine $x+d \geq 0$:

$$\sqrt{x^2-2\,x+7} \geq x+d \Longleftrightarrow x^2-2\,x+7 \geq x^2+2\,d\,x+d^2 \Longleftrightarrow 2(1+d) \leq 7-d^2$$

Ora se $d=-1$, l'ultima diseguaglianza diventa $0 \leq 6$ e quindi $d=-1$ é un minorante. Infine se $d > -1$, allora $1+d > 0$ e si ottiene:

$$2(1+d) \leq 7-d^2 \Longleftrightarrow x \leq \frac{7-d^2}{2(1+d)}$$

Pertanto se $d > -1$, d non é minorante. Se ne conclude che $\inf A = -1$ e siccome $0 \neq 6$, $-1 \notin A$ e quindi A non ha minimo.

3. Sia

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+x+1},\ x \in \mathcal{R}$$

Dire se f é iniettiva e calcolarne l'insieme dei valori.

Risulta

$$f(x) = f(y) \Longleftrightarrow \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} = \frac{y^2 + y}{y^2 + y + 1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2\, y^2 + x^2\, y + x^2 + x\, y^2 + x\, y + x = y^2\, x^2 + x\, y^2 + y^2 + x^2\, y + x\, y + y \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0 \Longleftrightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0$$

Se ne conclude che f non é iniettiva, infatti per esempio $f(0) = f(-1)$.

Ora

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x^2 + x = y\, x^2 + x\, y + y \Longleftrightarrow (y - 1)x^2 + (y - 1)x + y = 0$$

Affinché questa ultima equazione sia risolubile in x, deve essere $y \neq 1$ e

$$0 \leq \Delta(y) = (y - 1)^2 - 4\, y(y - 1) = (y - 1)(-3\, y - 1)$$

ossia deve essere:

$$y \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right)$$

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{n \to \infty} n^2\ \sin\left(\frac{2\, n^2 + n}{1 + n^4}\right), \quad b) \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 3\, x}{x^2 + 2}\right)^x$$

Risulta:

$$n^2\ \sin\left(\frac{2\, n^2 + n}{1 + n^4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\, n^2 + n}{1 + n^4}\right)}{\frac{2\, n^2 + n}{1 + n^4}}\quad n^2\ \frac{2\, n^2 + n}{1 + n^4}$$

Pertanto, ricordando il limite fondamentale:

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin\, y}{y} = 1$$

si ottiene:

$$\lim_{n \to \infty} n^2\ \sin\left(\frac{2\, n^2 + n}{1 + n^4}\right) = 2$$

Risulta infine:

$$\left(\frac{x^2 + 3\, x}{x^2 + 2}\right)^x = \left(1 + \frac{3\, x - 2}{x^2 + 2}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{3\, x - 2}{x^2 + 2}\right)^{\frac{x^2 + 2}{3\, x - 2}}\right]^{\frac{3\, x^2 - 2\, x}{x^2 + 2}}$$

Ricordando infine che:

$$\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

si ottiene:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 3\, x}{x^2 + 2}\right)^x = e^3$$