SOLUZIONI II PARZIALE - 22 GENNAIO 2018

1) $f(x,y,z,t) = (ax,\ y-t,\ 2x+az)$

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

CIÒ EQUIVALE A RISOLVERE IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO:

$$\begin{cases} ax = 0 \\ y-t = 0 \\ 2x+az = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq rg(A) \leq 3$$

INOLTRE, POICHÈ IL SISTEMA È OMOGENEO $\Rightarrow$ $rg\,A = rg\,[A|b]$.
AFFINCHÈ IL NUCLEO ABBIA DIMENSIONE 2 DEVE RISULTARE
$rg\,A = 2$.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 0 \iff a = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

ALLORA $rg\,A = 2 \iff a = 0$; QUINDI PER $\boxed{a=0}$ $\dim \ker f = 2$

SE $a=0$ $\begin{cases} y-t=0 \\ 2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=t \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ker f = \{(0,y,z,y)^T \mid y,z \in \mathbb{R}\} = \{y(0,1,0,1)^T + z(0,0,1,0)^T\}$

$\ker f = [(0,1,0,1)^T, (0,0,1,0)^T]$

$\underline{\dim \mathrm{Im} f} = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f = 4-2=\underline{2}$

UNA BASE DI $\mathrm{Im} f$ È FORNITA DALLE COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI DELLA MATRICE A, PER $a=0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Im} f = [(0,0,2)^T, (0,1,0)^T]$$

IL VETTORE $(1,1,1)^T$ NON APPARTIENE AD $\mathrm{Im} f$ PER $a=0$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

QUINDI $(1,1,1)^T$ È LIN. INDIPENDENTE DAI VETTORI DELLA BASE DI $\mathrm{Im} f$.

2) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad f(x,y,z) = (x-z,\ 2x+y,\ 2y+z)$

$C = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\} \rightarrow$ BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$

$f(1,0,0) = (1,2,0)$

$f(0,1,0) = (0,1,2) \qquad \Rightarrow \qquad M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$f(0,0,1) = (-1,0,1)$

$B = \{(1,0,1),\ (2,0,0),\ (-3,1,1)\}$

$f(1,0,1) = (0,2,1)_C$

$f(2,0,0) = (2,4,0)_C \qquad \rightarrow$ QUESTI VETTORI (ESPRESSI NELLA BASE CANONICA C) DEVONO ESSERE RISCRITTI RISPETTO ALLA NUOVA BASE B.

$f(-3,1,1) = (-4,-5,3)_C$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a + 2b - 3c \\ y = c \\ z = a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = z - y \\ b = \dfrac{x+4y-z}{2} \\ c = y \end{cases}$$

DA CUI SI RICAVA

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 7/2 \\ 2 \end{pmatrix}_B \ ; \ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 8 \\ -27/2 \\ -5 \end{pmatrix}_B$$

DA CUI $$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 7/2 & 9 & -27/2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

ALTRO METODO:

$$M_B^B(f) = M_B^C(i_{\mathbb{R}^3})\, M_C^C(f)\, M_C^B(i_{\mathbb{R}^3})$$

$$M_C^B(i_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PER TROVARE $M_B^C(i_{\mathbb{R}^3})$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a + 2b - 3c \\ y = c \\ z = a + c \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}_B ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$M_B^C(i_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

QUINDI $$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 7/2 & 9 & -27/2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

---

3)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda-2 & -3 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda-2)\left[(\lambda-2)^2 - 3\right] + \left(-(\lambda-2) - 3\right) - 3\left(1 + \lambda - 2\right)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 3) + -\lambda + 2 - 3 - 3(\lambda - 1) =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) - \lambda - 1 - 3\lambda + 3 =$$

$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2\lambda^2 + 8\lambda \cancel{-2} - 4\lambda \cancel{+2} =$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 5\lambda$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 5)$$

$\lambda_1 = 0$; $\lambda_{2,3} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \begin{cases} \dfrac{6+4}{2} = 5 \\ \dfrac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$

$\lambda_1 = 0 \; ; \quad \lambda_2 = 5 \quad ; \; \lambda_3 = 1$

LA MATRICE E' DIAGONALIZZABILE POICHE' HA AUTOVALORI DISTINTI.

PER TROVARE GLI AUTOSPAZI V_{λ_i} SI RISOLVONO I SISTEMI LINEARI OMOGENEI $(\lambda_i I - A)\underline{x} = \underline{0}$, $\forall i = 1,2,3$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{array} \right\} = \left[(-1,-1,1)^T \right]$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} 3x - y - 3z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{array} \right\} = \left[(3/2, 3/2, 1)^T \right]$$

$$V_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} +x + y + 3z = 0 \\ +x + y + 3x_3 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} = \left[(-1, 1, 0)^T \right]$$

LA MATRICE CHE DIAGONALIZZA LA MATRICE A E' DATA DA:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & -1 \\ -1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AM = M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $B = \{ \overset{v_1}{(0,1,0,1)}, \overset{v_2}{(2,1,0,1)}, \overset{v_3}{(-1,0,0,1)}, \overset{v_4}{(0,0,1,0)} \}$

SI COSTRUISCE UNA BASE ORTOGONALE MEDIANTE IL PROCESSO DI ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT.

$$v_1' = v_1 = (0,1,0,1)$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = (2,1,0,1) - (0,1,0,1) = (2,0,0,0)$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' =$$

$$= (-1,0,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,0,1) - \left(-\frac{2}{4}\right)(2,0,0,0) =$$

$$= (-1,0,0,1) - \left(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right) + (1,0,0,0) = \left(0,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$

$$v_4' = v_4 - \frac{\langle v_4, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \frac{\langle v_4, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_4, v_3' \rangle}{\langle v_3', v_3' \rangle} v_3' =$$

$$= (0,0,1,0) - 0 \cdot (0,1,0,1) - 0 \cdot (2,0,0,0) + 0 \cdot \left(0,-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= (0,0,1,0).$$

DIVIDENDO CIASCUNO DEI VETTORI OTTENUTI PER LA PROPRIA NORMA, SI OTTIENE UNA BASE ORTONORMALE:

$$B = \left\{ \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), (1,0,0,0), \left(0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,0,1,0) \right\}$$

I COEFFICIENTI DI FOURIER DI UN VETTORE v SONO DATI DALLE COORDINATE DEL VETTORE RISPETTO AD UNA BASE ORTOGONALE e SONO PARI A $\alpha_i = \dfrac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$

PER CIASCUNO DEI VETTORI v_i DELLA BASE ORTOGONALE.

POICHÈ B È ORTONORMALE SI HA $\langle v_i, v_i \rangle = 0 \quad \forall i$

QUINDI I COEFFICIENTI DI FOURIER DI $v = (5, 2, -1, 3)$ RISPETTO A B SONO DATI DA:

$$\alpha_1 = \langle v, v_1 \rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_2 = \langle v, v_2 \rangle = 5$$

$$\alpha_3 = \langle v, v_3 \rangle = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_4 = 1$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5) $q(x,y,z) = 5x^2 - 3y^2 - 2xz + 5z^2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda-5 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+3 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda-5)(\lambda+3)(\lambda-5) - (\lambda+3) \\ &= (\lambda+3)\left[(\lambda-5)^2 - 1\right] \\ &= (\lambda+3)(\lambda^2 - 10\lambda + 25 - 1) \\ &= (\lambda+3)(\lambda^2 - 10\lambda + 24) \end{aligned}$$

$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_{2,3} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-96}}{2} = \begin{cases} 6 = \lambda_2 \\ 4 = \lambda_3 \end{cases}$

LA FORMA QUADRATICA E' INDEFINITA -

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} -8x + z = 0 \\ x - 8z = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} \cancel{x + y = 0} \\ 9y = 0 \\ x + z = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} \cancel{-x + z = 0} \\ 7y = 0 \\ x - z = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

NORMALIZZANDO GLI AUTOVETTORI CHE COSTITUISCONO LE BASI DEGLI AUTOSPAZI SI OTTIENE LA BASE RICHIESTA

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

---

6) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

$B = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$

$B'' = \{(1,1,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1), (0,1,1,0)\}$

$f(1,1,0) = (2,1,1,2)_C$; $f(0,1,1) = (1,2,1,2)_C$; $f(1,0,1) = (1,1,2,2)_C$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = a + b + d \\ z = c + d \\ t = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y - x - z + t \\ c = t \\ d = z - t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2-1+2 \\ 2 \\ 1-2 \end{pmatrix}_{B''} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{B''} ; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-1-1+2 \\ 2 \\ 1-2 \end{pmatrix}_{B''} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{B''}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-1-2+2 \\ 2 \\ 2-2 \end{pmatrix}_{B''} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B''} \Rightarrow M^{B}_{B''}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7) r CON $v = (1, 2, -2)$ $P = (-1, 0, 3)$

$$r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$ EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-2}$$ EQ. CARTESIANE

$(1, -1, -1) \in r$?

$$\begin{cases} 1 = -1 + t \\ -1 = 2t \\ -1 = 3 - 2t \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = t \\ -\frac{1}{2} = t \\ \cancel{2 = t} \end{cases}$$ → IL SISTEMA È IMPOSSIBILE QUINDI $(1, -1, -1) \notin r$.

$$s: \begin{cases} x = 2t \\ y = t - 2 \\ z = t - 1 \end{cases}$$ → PARAMETRI DIRETTORI $(2, 1, 1)$

QUINDI LE DUE RETTE NON SONO PARALLELE.

DALLE EQUAZIONI CARTESIANE SI RICAVA:

$$r: \begin{cases} 2x - y = -2 \\ -2x - z = -1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - 2z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

PER VEDERE SE r ed s SI INTERSECANO BISOGNA STUDIARE IL SISTEMA:

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ -2x - z = -1 \\ x - 2z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad [A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq rg(A) \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg\,A = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -26 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg[A/b] = 4$$

$rg\,A \neq rg\,[A|b] \longrightarrow$ IL SISTEMA È INCOMPATIBILE

QUINDI LE DUE RETTE NON SONO INCIDENTI.

LE RETTE PASSANTI PER $P = (-1, 0, 3)$ DI PARAMETRI DIRETTORI (u_1, u_2, u_3) SONO DATE DA:

$$r: \begin{cases} x = -1 + u_1 t \\ y = u_2 t \\ z = 3 + u_3 t \end{cases}$$

IMPONIAMO LA CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ CON r:

$$u_1 + 2u_2 - 2u_3 = 0 \iff \boxed{u_1 = 2u_3 - 2u_2}$$

QUINDI SONO TUTTE LE RETTE DI EQ. CARTESIANA

$$s: \quad \frac{x+1}{2u_3 - 2u_2} = \frac{y}{u_2} = \frac{t}{u_3}$$

E SONO INFINITE AL VARIARE DI u_2 e u_3.