Matematica discreta - II parziale
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (5 punti) Data la famiglia di applicazioni lineari $f(x,y,z,t) = (ax, y-t, 2x+az)$, determinare gli eventuali valori del parametro reale a per i quali la dimensione del nucleo di f vale 2. Per tali valori di a determinare una base del nucleo, una base dell'immagine e verificare se il vettore $(1,1,1)$ appartiene all'immagine.

2. (5 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x,y,z) = (x-z, 2x+y, 2y+z)$. Si scriva la matrice rappresentativa A di f rispetto alla base canonica nel dominio e codominio ($M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$) e rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(2,0,0),(-3,1,1)\}$ nel dominio e nel codominio ($M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$).

3. (5 punti) Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Determinare gli autovalori di A e i relativi autovettori e dire se la matrice è diagonalizzabile. In tal caso, trovare una base che rende diagonale la matrice.

4. (5 punti) Sia $\mathcal{B} = \{(0,1,0,1),(2,1,0,1),(-1,0,0,1),(0,0,1,0)\}$ una base di $\mathbb{R}^4$. Costruire a partire da essa una base ortonormale. Determinare i coefficienti di Fourier del vettore $(5,2,-1,3)$ rispetto alla base determinata. Considerata la matrice le cui colonne sono gli elementi della base, trovarne l'inversa.

5. (5 punti) Determinare il segno della forma quadratica $q(x,y,z) = 5x^2 - 3y^2 - 2xz + 5z^2$. Individuare una base ortonormale rispetto a cui la forma quadratica è diagonalizzabile.

6. (5 punti) Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1, x_1+x_2+x_3)$. Trovare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ del dominio e $\mathcal{B}'' = \{(1,1,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1),(0,1,1,0)\}$ del codominio.

7. (5 punti) Sia r la retta con parametri direttori $v = (1,2,-2)$ passante per $P = (-1,0,3)$:

- scrivere le equazioni parametriche e cartesiane di r
- il punto $Q = (1, -1, -1)$ appartiene alla retta?
- Sia s la retta di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t - 2 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

  Le due rette sono parallele?
- In caso esistano, determinare i punti di intersezione delle due rette.
- Quante sono le rette passanti per P e ortogonale a r? Giustificare.