Soluzioni compito 30 Gennaio 2018

1. Esercizio 1
   - $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
   - $w' = \frac{4}{5}\overrightarrow{i} + \frac{2}{5}\overrightarrow{j}$.
   - $w' = \frac{14}{9}\overrightarrow{i} - \frac{10}{9}\overrightarrow{j} - \frac{17}{9}\overrightarrow{k}$.
2. Esercizio 2
   - $V = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$, $W = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$.
   - $V + W = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\}$.
   - $V + W$ non è somma diretta.
3. Esercizio 3
   - $A \cdot B$ è invertibile, $A \cdot C$ non è invertibile.
   - $(AB)^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.
4. Esercizio 4
   - Per $k \neq 0$ e $k \neq 1$ il sistema è compatibile e ammette un'unica soluzione: $\left(\frac{2k+1}{k-1}, \frac{3}{2(k-1)}, -\frac{5k+4}{2(k-1)}\right)$.
   - Per $k = 0$ il sistema ammette infinte soluzioni: $(2+2y, y, -4(1+y))$.
   - Per $k = 1$ il sistema è incompatibile.
5. Esercizio 5
   - dim Imf$= 2$; Imf $= \{(1,2,-1),(3,1,2)\}$.
   - $\dim \ker f = 1$; $\ker f = \{(-1,-1,1)\}$.
   - $(2,3,h)^T$ appartiene ad Imf per $h = -1$.
   - L'applicazione non è suriettiva nè iniettiva.
6. Esercizio 6
   - $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Esercizio 7
   - La matrice associata all'applicazione lineare f ammette gli autovalori $\lambda_1 = -1$ con $m_a = m_g = 2$ e $\lambda_2 = -5$ con $m_a = m_g = 1$, pertanto la matrice è diagonalizzabile.

- La matrice diagonalizzante è

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Esercizio 8

   - Base ortogonale $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)\}$.
   - Base ortonormale $\mathcal{B}' = \left\{(1,0,0),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\right\}$.
   - Coefficienti di Fourier: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $a_3 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$.

9. Esercizio 9

   - $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   - La forma quadratica è semidefinita positiva.
   - Base ortonormale che diagonalizza la forma quadratica:
     $B = \left\{(0,1,0), \left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$.

10. Esercizio 10

    - Generatori del piano π' parallelo a π e passante per l'origine: $\left[(1,1,0),(0,-\frac{1}{2},1)\right]$.
    - Equazioni parametriche di π:

    $$\pi : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t - \frac{1}{2}s \\ z = s \end{cases}$$

    Equazione cartesiana $\pi : -2x + 2y + z + 4 = 0$.

    - La retta r ha parametri direttori $(1,-1,0)$ quindi il piano e la retta non sono paralleli.
    - Il piano e la retta si intersecano nel punto $Q = \left(\frac{9}{4}, -\frac{5}{4}, 3\right)$.
    - Detta A la matrice associata al sistema dato dalle equazioni cartesiane della retta e del piano e b il vettore dei termini noti, la condizione affinchè la retta giaccia sul piano è che si abbia $rg(A) = rg[A|b] = 2$.

30 gennaio 2018

1. $u=(0,-1,-1)$ $\quad v=(-2,-1,0)$ $\quad w=(2,-2,-1)$

- $\cos\varphi = \dfrac{\langle w, u\rangle}{\|w\|\,\|u\|} = \dfrac{2+1}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$

- proiezione ortogonale di w su v

$$w' = \left\langle w, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle \frac{v}{\|v\|} = (-4+2)\,\frac{(-2,-1,0)}{(\sqrt{5})^2} = \frac{-2}{5}\left(-2\vec{i}-\vec{j}\right)$$

$$= \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j}$$

- proiezione di w nel piano generato da u e v

$$u\times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i+2j-2k$$

$$w' = w - \left\langle w, \frac{u\times v}{\|u\times v\|}\right\rangle \frac{(u\times v)}{\|u\times v\|}$$

$$= \left(2\vec{i}-2\vec{j}-k\right) - \frac{(-2-4+2)}{9}\left(-i+2j-2k\right)$$

$$= \left(2\vec{i}-2j-k\right) + \frac{4}{9}\left(-i+2j-2k\right)$$

$$= \frac{14}{9}\vec{i} - \frac{10}{9}\vec{j} - \frac{17}{9}\vec{k}$$

2. $V = \{(x, y, z) \in R^3 \quad x - y - z = 0\}$

$W = \{(x, y, z) \in R^3 \quad y = z\}$

- $V = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ sono l. ind.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ rango 2

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ sono l. indip.

- $W + V =$ ~~$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$~~ generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una base è $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ z \end{pmatrix} \right\}$

- non è somma diretta

$W \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.c. } \begin{matrix} x = y + z \\ y = z \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{matrix} x = 2z \\ y = z \end{matrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \neq \{0\}$

OPPURE

$\dim(W \cap V) = \dim V + \dim W - \dim(V + W)$

$= 4 - 3 = 1 \Rightarrow V \cap W \neq \{\underline{0}\}$

3.

$\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1$ invertibile
$\det(AC) = \det A \cdot \det C = 0$ non invertibile

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{1}\left(\mathrm{adj}(AB)\right)^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

4.
$$A = \begin{pmatrix} -2 & k & -1 \\ k & k^2 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad rg A \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & k & -1 \\ k & k^2 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} -2 & k & -1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} -2 & k-4 & -1 \\ 1 & k+2 & 1 \\ 1 & -2+2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= k \begin{vmatrix} -2 & k-4 & -1 \\ 1 & k+2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} k-4 & -1 \\ k+2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= k\,(k-4+k+2) = k(2k-2) = 2k(k-1)$$

$k \neq 0 \quad k \neq 1 \qquad rg A = 3 \quad e \quad rg(A|b) = 3$

Il sistema è di Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & -1 \\ k & k^2 & k \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{2k(k-1)} = \frac{k \begin{vmatrix} 0 & k & -1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2k(k-1)} = \frac{2k(k+k+1)}{2k(k-1)} = \frac{2k+1}{k-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ k & k & k \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{2k(k-1)} = \frac{\cancel{k} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{2\cancel{k}(k-1)} = \frac{3}{2(k-1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & k & 0 \\ k & k^2 & k \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{2k(k-1)} = \frac{\cancel{k} \begin{vmatrix} -2 & k & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{2\cancel{k}(k-1)} = -\frac{5k+4}{2(k-1)}$$

per $k = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg\, A = 2 \qquad \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad rg\, A = rg\,(A|b)$$

$\exists$ soluzioni e sono $\infty^{3-2} = \infty^{1}$

$$\begin{cases} -2x - z = 0 \\ x = 2 + 2y \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 2 + 2y \\ z &= -4 - 4y \end{aligned}$$

Soluzioni $\left(2+2y,\ y,\ -4(1+y)\right)$

$k = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg\, A = 2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$rg\,(A|b) = 3$

Sistema impossibile

Riassumendo

per $k \neq 0$ e $k \neq 1$, $Sol = \left(\frac{3k+1}{k-1}, \frac{3}{2(k-1)}, -\frac{5k+4}{2(k-1)} \right)$

per $k = 0$, ∞ sol. $(2+2y, y, -4(1+y))$

per $k = 1$ sistema impossibile, $Sol = \emptyset$

5. $f: R^3 \to R^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+3y+4z \\ 2x+y+3z \\ -x+2y+z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg\, A \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-6 & 3-8 \\ -1 & 2+3 & 1+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$rg(A) = 2 \qquad \dim \mathrm{Im} f = 2$

$$\text{base } \mathrm{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{array}{l} x+3y+4z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ -x+2y+z=0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{array}{l} x+3y=-4z \\ 2x+y=-3z \end{array} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} -4z & 3 \\ -3z & 1 \end{vmatrix}}{1-6} = \frac{-4z+9z}{-5}$$

$$= \frac{5z}{-5} = -z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4z \\ 2 & -3z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-3z+8z}{-5} = \frac{5z}{-5} = -z$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f \iff \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & h \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3-4 \\ -1 & 2 & h+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-6 & -1 \\ -1 & 2+3 & h+2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 5 & h+2 \end{vmatrix} = (h+2)(-5)+5=0$$

$$= 5\left[-h-2+1\right] = 5\left[+h+1\right] = 0$$

$h=-1$

L'applicazione non è né iniettiva né suriettiva

6. $f : R^3 \longrightarrow R^4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1,1,0),(0,1,1)(1,0\,1)\}$

$B' = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0\,0\,0\,1)\}$

$M^{B}_{B'}(f)$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{B}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

7. $f : R^3 \longrightarrow R^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} +\lambda & 2 & -1 \\ -2 & \lambda+5 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ -2 & \lambda+5 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = +\lambda\left((\lambda+5)(\lambda+2) - 4\right) + 2\left(2(\lambda+2) - 2\right) + (-4) + (\lambda+5)$$

$$= +\lambda\left(\lambda^2 + 10 + 7\lambda - 4\right) + 2(2\lambda+2) + \lambda + 1$$

$$= +\lambda\left(\lambda^2 + 7\lambda + 6\right) + 4(\lambda+1) + (\lambda+1)$$

$$= (\lambda+1)\left[+\lambda(\lambda+6) + 4 + 1\right] = (\lambda+1)(+\lambda^2 + 6\lambda + 5)$$

$$= +(\lambda+1)(\lambda^2 + 6\lambda + 5)$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$$

$$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+6)$$

$$\lambda = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -6 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -1$ molt. alg. 2

$\lambda_2 = -5$ molt. alg 1

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Infatti posto $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M^{\mathcal{B}}_{C}(i_{\mathbb{R}^3})$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} M = M \, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -5 \end{pmatrix} = \underbrace{M^{C}_{\mathcal{B}}(i_{\mathbb{R}^3})}_{\shortparallel \; M^{-1}} A \; \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{C}(i_{\mathbb{R}^3})}_{\shortparallel \; M}$$

8. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ formano una base

Infatti posto $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $\det A = -1-1 \neq 0$

$\operatorname{rg} A = 3$

Si trova una base ortogonale

$$v_1' = v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$v_2' = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$v_3' = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{0}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Base ortonormale

$$\frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \quad \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Dato $v = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$, le componenti rispetto alla base ortonormale sono

$$\alpha_1 = 2 = \left\langle \frac{v_1'}{\|v_1\|}, v \right\rangle$$

$$\alpha_2 = \left\langle v, \frac{v_2'}{\|v_2'\|} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_3 = \left\langle v, \frac{v_3'}{\|v_3'\|} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = -3/\sqrt{2}$$

9

$$q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 4xz + 4z^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4) + 2\left(-2(\lambda-3)\right)$$

$$= (\lambda-3)\left[\lambda^2 \cancel{+4} - 5\lambda \cancel{-4}\right]$$

$$= (\lambda-3)\,\lambda\,(\lambda-5)$$

f. q. semidefinito positivo

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2x + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -x + 2z = 0 \\ -3y = 0 \\ 2x - 4z = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 4x + 2z = 0 \\ 2y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ è base ortogonale

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$$ è ortonormale

10. π ha vettore normale $(-2,2,1)$

$$P = (3,1,0)$$

$$a(x-3) + b(y-1) + c(z) = 0$$

$$-2(x-3) + 2(y-1) + z = 0 \quad \text{equazione di } \pi$$

$$-2x + 6 + 2y - 2 + z = 0$$

$$-2x + 2y + z + 4 = 0 \quad \underline{\text{eq. cartesiana di } \pi}$$

Piano parallelo a π passante per l'origine

$$\pi' \quad -2x + 2y + z = 0$$

Si trovano due generatori di π'

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque π ha $\underline{\text{equazioni parametriche}}$

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t - \frac{1}{2}s \\ z = 0 + s \end{cases}$$

r sia di equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{parametri} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

piano e retta sono paralleli se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i vettori non sono ortogonali
dunque piano e retta non sono $\parallel$

$$\begin{cases} -2x+2y+z+4=0 & \pi \\ \left.\begin{array}{l} y-1+x=0 \\ z=3 \end{array}\right\} & r \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x+2y+z=-4 \\ x+y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2-2 \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -2x+2y+3=-4 \\ x=1-y \end{array}\right\}$$

$\left(\frac{9}{4}, -\frac{5}{4}, 3\right)$ è l'intersezione tra r e π

Piano e retta sono tali che la retta giace nel piano se il sistema dato dalle eq. cartesiane della retta e del piano ha rango 2 e rango $(A|b)=2$

Ci sono allora ∞^1 soluzioni