Matematica discreta - 30-1-2018
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (5 punti) Siano dati $u = -\vec{j} - \vec{k}$, $v = -2\vec{i} - \vec{j}$ e $w = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ vettori di $\mathbb{R}^3$.
   - Calcolare l'angolo compreso tra i vettori w e u.
   - Determinare la proiezione ortogonale di w su v.
   - Determinare la proiezione ortogonale di w sul piano generato da u e v.

2. (5 punti) Siano $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$.
   - Determinare una base per V e W rispettivamente.
   - Determinare $V + W$.
   - Stabilire se $V + W$ è somma diretta.

3. (5 punti) Siano date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Stabilire se le matrici $A \cdot B$ e $A \cdot C$ sono invertibili (nota bene: non occorre fare il prodotto!) e, in tal caso, calcolarne linversa.

4. (5 punti) Risolvere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -2x + ky - z = 0 \\ kx + k^2y + kz = k \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

5. (5 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x, y, z) = (x+3y+4z, 2x+y+3z, -x+2y+z)$. Trovare la dimensione di $\mathrm{Imm}(f)$ e una base, la dimensione di $\ker(f)$ e una base. Per quali valori di h il vettore $(2, 3, h)^T$ appartiene all'immagine di f? L'applicazione è iniettiva e/o suriettiva?

6. (5 punti) Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1, x_1+x_2+x_3)$. Trovare la matrice rappresentativa A dell'applicazione lineare rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ del dominio e $\mathcal{B}' = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ del codominio.

7. (5 punti) Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_2 + x_3, 2x_1 - 5x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 - 2x_3)$. Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ rispetto a cui la matrice è diagonalizzabile e, in tal caso, trovare la matrice che diagonalizza l'applicazione. (Sugg.:un autovalore è -1).

8. (5 punti) Mostrare che i vettori $(1,0,0),(2,1,1),(0,1,-1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$; a partire da questi calcolare una base ortogonale e una base ortonormale. Calcolare le componenti del vettore $(2,1,4)$ rispetto alla base ortonormale.

9. (4 punti) Scrivere la matrice che rappresenta la forma quadratica $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 4xz + 4z^2$ e stabilire il segno della forma quadratica. Determinare la base ortonormale che diagonalizza la forma quadratica.

10. (5 punti) Sia π il piano di vettore normale $n = (-2;2;1)$ passante per $P = (3;1;0)$:

    - trovare due generatori del piano parallelo a π passante per l'origine;
    - dare le equazioni parametrica e cartesiana di π.

    Sia r la retta di equazione:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$$

    Il piano e la retta sono paralleli? In caso esistano, determinare i punti di intersezioni tra il piano e la retta. Qual è la condizione affinchè una retta giaccia sul piano?