Matematica discreta - 20-2-2018
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (3 punti) Siano $v_1 = (1; 0; 1)$, $v_2 = (0; 1; 0)$ e $v_3 = (1; 1; 2)$ vettori dello spazio. Determinare le componenti del vettore proiezione ortogonale di v_1 sul piano contenente v_2 e v_3.

2. (5 punti) Dire se i seguenti insiemi sono sottospazi:

   - $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\}$
   - $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x = 0\}$

   Determinare una base di U. Dato il sottospazio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0\}$, determinare il sottospazio somma $U + W$ e la sua dimensione. Verificare se tale sottospazio è somma diretta.

3. (5 punti) Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & k & 1 \end{pmatrix}$$

   Trovare l'inversa della sottomatrice data dalle prime tre colonne di A per $k = 0$.

4. (5 punti) Discutere, al variare del parametro reale k, la risolubilità del seguente sistema:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 1 \\ kx + y = 0 \end{cases}$$

   Nei casi in cui il sistema risulta compatibile, determinare le soluzioni, risolvendo il sistema con il metodo a gradini.

5. (5 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f(x, y, z) = (-y + 2z, 3x - 4y + z, \alpha x - 3y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   - Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, trovare una base del nucleo dell'applicazione lineare e la sua dimensione.
   - Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, trovare una base di $\mathrm{Imm} f$ e la sua dimensione.
   - Stabilire se f è iniettiva e suriettiva.

- Discutere l'appartenenza del vettore $(-1, \beta, 1)$ a Imm$f$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6. (5 punti) Sia $f : R^2 \to R^2$ rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Trovare la matrice che rappresenta la f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,3),(3,5)\}$. Determinare la dimensione dell'Imm(f) e del Ker(f) e trovare basi per entrambi i sottospazi.

7. (5 punti) Data la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $(1,0,0),(2,3,0),(3,4,-2)$, costruire una base ortonormale. Trovare le coordinate del generico elemento (x,y,z) rispetto alla base ortonormale determinata (coefficienti di Fourier).

8. (5 punti) Dato l'operatore lineare $f(x,y,z) = (x+y+2z, x+2y+z, 2x+y+z)$, trovare gli autovalori dell'operatore. Nel caso l'operatore sia diagonalizzabile, trovare la base che diagonalizza f e la matrice che rappresenta f rispetto a tale base.

9. (5 punti) Sia $q(x,y,z) = -8x^2 + y^2 + 6xz$. Determinare il segno della forma quadratica e la base ortonormale rispetto a cui la forma quadratica è diagonalizzabile.

10. (5 punti) Determinare le equazioni della retta s passante per $P_0 \equiv (1,2,3)$ e

    - parallela alla retta $r : x + 2y - z + 3 = 0; 2x + 2y - 3z + 5 = 0$
    - perpendicolare alla retta $r : x = z + 4; y = z - 7$ e parallela a $\pi \equiv 3x + 4y + 5z - 10 = 0$