

Calcolo Scientifico

Per ogni esercizio indicare sul foglio il nome del direttorio ove sono contenuti gli m-file che lo risolvono e gli eventuali input. Se necessario, scrivere sul foglio le modalità di svolgimento e/o i risultati.

1. (4 punti) Sia $f(x) = \sin(\frac{x+1}{2}) + \cos(\frac{x+1}{2})$. Assegnati i valori della funzione in 4 punti equispaziati dell'intervallo $[0, \pi/2]$ (estremi inclusi), , determinare il polinomio di interpolazione relativo a questi punti espresso con la formula di Lagrange. Valutare il polinomio in $x = \pi/3$, fornendo una stima dell'errore commesso.
2. (3 punti) Ripetere l'esercizio calcolando il polinomio di Hermite relativamente agli stessi punti. Scrivere per esteso il polinomio. Dare una stima dell'errore commesso in $x = \pi/3$.
3. (3 punti) Ripetere l'esercizio, costruendo la spline lineare di interpolazione e valutando la spline in $x = \pi/3$. Farne il grafico e dare una stima dell'errore commesso.
4. (4 punti) Usando come nodi gli zeri di un opportuno polinomio di Chebyshev, determinare il grado del polinomio di interpolazione di Newton della funzione $f(x) = \cos(\frac{x+1}{4}) + \cos(\frac{x+1}{2})$ relativo a tali nodi in $[0, \pi/2]$, in modo che l'errore sia inferiore a 10^{-3} . Costruire il grafico di tale polinomio.
5. (4 punti) Determinare l'ampiezza dell'intervallo in cui il polinomio di Mac Laurin di grado 3 approssima $\frac{1}{x+1}$ con una precisione pari almeno a $1e-3$.
6. (4 punti) Data la tabella di dati sotto riportata scrivere il polinomio di grado 3 di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati che onora al meglio i punti assegnati.

x	$f(x)$
-5	-6
-3	-8
-1	2
0	7
1	1
2	3
4	6
5	10
7	15

Determinare la deviazione standard del modello, i residui scalati e dire se il modello è adeguato.

7. (4 punti) Scrivere i coefficienti del polinomio di miglior approssimazione di grado 2 relativo ai dati dell'esercizio precedente, espresso come combinazione lineare di polinomi ortogonali rispetto a pesi $w_i = 1$ e ai nodi della tabella.
8. (4 punti) Scrivere il polinomio trigonometrico di interpolazione di grado 3 della funzione $|\cos x - 1|$ nell'intervallo $[0, \pi]$. Fare il grafico della funzione e del polinomio trigonometrico nell'intervallo $[0, \pi]$.
9. (4 punti) Calcolare una approssimazione della derivata prima di $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$ in $x = \pi/4$ usando la formula a 3 punti centrale con $h = 0.1$ in modo che l'errore sia dell'ordine di 10^{-4} (usare la tecnica di Richardson).
10. (4 punti) Calcolare una approssimazione dell'integrale

$$\int_{-2}^2 (x+1) \sin(x+2) dx$$

con la formula dei trapezi composta in modo che l'errore sia dell'ordine di 10^{-2} .

11. (4 punti) Calcolare una approssimazione del seguente integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^2 + \pi) dx$$

usando una formula di Gauss-Legendre a tre punti. Fornire una stima dell'errore commesso.

12. (4 punti) Usare il metodo di Romberg per calcolare il seguente integrale

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{\exp(x^2) + 1} dx$$

con un'approssimazione dell'ordine di 10^{-3} . Determinare il numero di valutazioni di funzioni. Confrontare il risultato ottenuto con quello di una formula di quadratura adattiva, determinando il numero di valutazioni di funzioni in entrambe i casi.