Programma del corso di

Calcolo delle Variazioni

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

a.a. 2015/2016

Michele Miranda

1 Programma

Si riporta di seguito l'elenco degli argomenti trattati durante il corso tenuto nel periodo marzo-maggio 2016; tali argomenti sono stati presi prevalentemente dal libro di Brezis [1]; la prima parte del corso relativa agli spazi di Sobolev in dimensione uno e relativi problemi variazionali è stata presa anche dal libro di Buttazzo, Giaquinta e Hildebrandt [2]. Per l'ultima parte, si fa riferimento ai lavori di De Giorgio[3] e Moser [6, 7]; un buon testo di riferimento per questa parte è il libro di Giusti [5], anche nella versione italiana [4].
Introduzione ai problemi variazionali; funzione Lagrangiana ed equazione di Eulero-Lagrange associata. Condizioni necessarie per l'esistenza del minimo e principio di Dirichlet. Controesempio di Hadamard; Laplaciano in coordinate polari e determinazione di una funzione con energia infinita con assegnato dato al bordo continuo. Condizione necessaria e sufficiente sul dato al bordo per avere la soluzione del problema di Dirichlet in modo variazionale. Semicontinuita inferiore e Teorema di Weierstrass rivisito.
Funzioni semicontinue; semicontinuità topologica e semicontinuità sequenziale. Proprietà delle funzioni semicontinue; definizione di funzionale rilassato e descrizione delle sue proprietà. Condizioni sufficienti per l'esistenza dei minimi; semicontinuità e coercitività.
Energia di Dirichlet; proprietà delle successioni minimizzanti. Determinazione della nozione di convergenza secondo la quale le successioni minimizzanti sono compatte. Completamento delle funzioni regolari mediante tale convergenza.
Definizione di $H^{1,2}(a,b)$; continuità Hölderiana e descrizione delle principali proprietà. Dimostrazione delluguaglianza $H^{1,2}(a,b) = W^{1.1}(a,b)$; teoremi di approssimazione per funzioni Sobolev. Estensione di funzioni Sobolev definite su intervalli a tutta la retta reale e Teorema fFondamentale del calcolo integrale.
Funzioni Lipschitz; caratterizzazioni equivalenti delle funzioni $H^{1.p}(a,b)$ con $p \in (1,\infty)$. Differenziabilità quasi ovunque delle funzioni Lipschitziane. Immersione compatta dello spazio $H^{1,p}(a,b)$ in $L^p(a,b)$ su di un intervallo limitato. Semicontinuità inferiore dellenergia di Dirichlet e proprietà di continuità fino al bordo delle funzioni Sobolev. Coincidenza di varie nozioni di convergenza in ambiente Sobolev.

Caso limite $p = 1$; funzioni a variazione limitata. Teoremi di immersione continua e compatta. Teorema di Frechet-Kolmogorov. Immersione compatta di $H^{1,p}(a, b)$ in $C^{0,1-1/p}(a, b)$ nel caso di intervallo limitato e $p > 1$. Definizione di $H_0^{1,p}(a, b)$ e confronti; immersione continua di $H^{1,1}(\mathbb{R})$ in $C(\mathbb{R})$. Dimostrazione dell'uguaglianza $H^{1,p}(\mathbb{R}) = H_0^{1,p}(\mathbb{R})$; disuguaglianza di Poincaré e immersione compatta di $H^{1,1}(a, b)$ in $L^q(a, b)$ per ogni $q > 1$ nel caso di intervallo limitato.
Teoremi di semicontinuità alla Tonelli e Teoremi di esistenza di minimo di Lagrangiane a crescita polinomiale; esistenza del minimo in $H^{1,p}(a, b)$ con $p > 1$ con (a, b) intervallo limitato.
Teoremi di semicontinuità e compattezza debole in $H^{1,1}(a, b)$. Fenomeno di Lavrentiev. Alcuni esempi significativi; casi di Lagrangiane convesse e non.
Problemi con condizioni al bordo; soluzioni deboli e loro regolarità. Problema di Dirichlet omogeneo e non; principio del massimo. Regolarità per soluzioni deboli di equazioni di Eulero-Lagrange con dato $L^2(a, b)$.
Problema degli autovalori; operatori compatti e risolvente. Autovalori del Laplaciano in dimensione uno. Operatore di Sturm-Liouville; studio dello spettro e della distribuzione spettrale. Completezza del sistema di autofunzioni. Connessioni con la disuguaglianza di Poincare e caratterizzazione del risolvente dell'operatore $Au = -u$. Alcune applicazioni ed approfondimenti; geodetica e brachistocrona.
Spazi di Sobolev in dimensione n; definizione e caratterizzazioni equivalenti. Dimostrazione del Teorema $H = W$. Riflessività e separabilità nel caso $p \in ()1, +\infty)$. Formule di derivazione; prodotti, composizione e cambiamento di variabili. Operatore di prolungamento; domini con bordo di classe C^1 e costruzione dell'operatore continuo di estensione $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Definizione di $W_0^{1,p}(\Omega)$ e sue proprietà. Disuguaglianza di Poincaré e problemi variazionali. Regolarità $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ delle soluzioni deboli del problema $-\Delta u + u = f$ con f in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Regolarità delle soluzioni deboli di equazioni ellittiche; regolarita $W^{2,2}(\Omega)$ con dati $L^2(\Omega)$ su domini con bordo di classe C^2. Ulteriore regolarità nel caso di dati più regolari e metodo degli incrementi di Nirenberg.
Soluzioni in $L^p(\Omega)$ e Teorema di Agmon-Douglas-Nirenberg; metodo di dualità per le soluzioni con dati $L^1(\Omega)$. Problema di Dirichlet non omogeneo; posizione del problema e tracce di funzioni Sobolev sul bordo di domini regolari.
Tracce di funzioni Sobolev su domini con bordo regolare; problema della suriettività e spazi di Sobolev frazionari.
Principio del massimo. Problema di Neumann e soluzioni di problemi al bordo non variazionali.
Soluzioni deboli locali con matrice limitata uniformemente ellittica; dimostrazione della continuità Hölderiana derivata dalla stima del decadimento delloscillazione. Descrizione dellapporccio di De Giorgi e di Moser.
Funzioni a variazione limitata ed insiemi di perimetro finito; formula di coarea e disuguaglianza isoperimetrica. Locale limitatezza delle funzioni appartenenti alla classe di De Giorgi ellittica mediante iterate successive. Uniforme limitatezza dal basso per soluzioni deboli positive; stima del decadimento delloscillazione e continuità Hölderiana. Cenni sulla dimostrazione di Moser della disuguaglianza di Harnack.
Introduzione alle superfici minime ed al Problema di Plateau; metodi classici (superfici cartesiane e parametriche). Superfici orientate non parametriche; panoramica dei principali risultati mediante la teoria dei perimetri.

2 Approfondimenti

Vengono di seguito riportati alcuni argomenti che potrebbero essere scelti come materiale da portare all'esame; gli argomenti riportati non sono stati trattati durante il corso o sono stati solo parzialmente coperti.

Si sottolinea che la lista che segue è solo una possibile proposta di argomenti; qualsiasi altro argomento attinente con quanto fatto durante il corso può essere scelto come materiale d'esame.

Per l'esame si può anche scegliere un argomento a scelta tra quelli trattati durante il corso; in tal caso pero' si richiede che l'argomento portato tocchi quanti più argomenti possibile, in modo tale che il candidato dimostri una buona conoscenza delle metodologie acquisite durante il corso.

1. Teoremi di semicontinuità; varie condizioni che permettano la semicontinuità di Lagrangiane non necessariamente convesse. Problema di esistenza di minimi nel caso di Lagrangiana con crescita superlineare.

2. Formulazione e completa risoluzione (dimostrazione esistenza delle soluzioni e delle loro regolarità) di un problema variazionale in dimensione uno (Dirichlet, Sturm-Liouville, brachistocrona, principio di Fermat, problema del profilo ottimo per l'aerodinamica, la catenaria, superfici minime simmetriche, ecc).

3. Funzioni a variazione limitata in dimensione uno e applicazione ad alcuni problemi variazionali (semicontinuità nello spazio delle misure, teoremi di esistenza di minimi).

4. Fenomeno di Lavrentiev; descrizione del fenomeno, insieme singolare e condizioni che garantiscano il non verificarsi di tale fenomeno.

5. Problemi variazionali con ostacolo.

6. Soluzioni periodiche di problemi variazionali.

7. Problemi variazionali con Lagrangiana non coerciva.

8. Teoria spettrale di operatori (esempio modello: Laplaciano). Teoria degli operatori compatti in generale, in spazi di Hilbert in particolare; teorema spettrale per gli operatori compatti autoaggiunti. Applicazione nello studio dell'operatore Laplaciano e sue modificazioni. In questo approfondimento si può anche studiare il teorema dell'alternativa di Fredholm e sue applicazioni.

9. Dimostrazione dei Teoremi di traccia per funzioni Sobolev su domini regolari; per questo approfondimento serve fare qualche risultato preliminare sugli spazi di Sobolev frazionari e dimostrare quindi la suriettività della mappa di traccia. Si potrebbe anche vedere il caso limite $p = 1$ in cui si dimostra che l'operatore di traccia è suriettivo da $W^{1,1}(\Omega)$ in $L^1(\partial\Omega)$.

10. Dimostrazione della disuguaglianza di Harnack seguendo il lavoro di Moser [7].

11. Funzioni a varizione limitata in dimensione n; insiemi di perimetro finito e applicazione allo studio delle superfici minime.

12. Il Teorema di Hille-Yoshida ed applicazioni ai problemi di evoluzione (equazione del calore ed equazione delle onde).

Riferimenti bibliografici

[1] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[2] Giuseppe Buttazzo, Mariano Giaquinta, and Stefan Hildebrandt. *One-dimensional variational problems*, volume 15 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. An introduction.

[3] Ennio De Giorgi. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3)*, 3:25–43, 1957.

[4] Enrico Giusti. *Metodi diretti nel calcolo delle variazioni.* Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994.

[5] Enrico Giusti. *Direct methods in the calculus of variations.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.

[6] Jürgen Moser. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13:457–468, 1960.

[7] Jürgen Moser. On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:577–591, 1961.